A chercher pendant les vacances

Problème 1

Une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est dite *T-polynomiale* s'il existe un entier naturel $m \geq 0$ et des polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{m-1}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$f(n) = P_{r_m(n)}(n)$$

où $r_m(n)$ désigne le reste de la division euclidienne de n par m.

1. Montrer que tout polynôme est un T-polynôme. Existe-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ qui ne soit pas T-polynomiale ?
2. Montrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors l'application $f : n \mapsto w_n$ est T-polynomiale.
3. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions T-polynomiales sont encore des fonctions T polynomiales.
4. Soient n et q deux entiers naturels avec $q \geq 1$. On note u_n le nombre d'entiers naturels k tels que $kq = n$ et on pose (v_n) la suite définie par
$$v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i,$$
déterminer (v_n).
5. L'application $f : n \mapsto v_n$ est-elle T-polynomiale ?

Problème 2

Soient A, B et C les sommets d'un triangle, K_1, L_1, M_1 les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. On appelle f l'opération qui passe du triangle ABC au triangle $K_1L_1M_1$ dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC. En itérant cette opération, on définit la suite de triangles $K_nL_nM_n$ telle que $K_1L_1M_1 = f(ABC)$ et $K_{n+1}L_{n+1}M_{n+1} = f(K_nL_nM_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que la suite $K_nL_nM_n$ converge vers un point P, déterminer ce point et estimer la vitesse de convergence.

Problème 3

1. On considère les 10 points du plan de coordonnées (a, b) où $a = 0, 2, 4, 6$ ou 8 et $b = 0$ ou 1. Trouver un chemin dont la somme des longueurs des ct̂és au carré est la plus petite possible, qui commence par $(0, 0)$ et finit par $(8, 0)$ ou $(8, 1)$.
2. Même défi pour $2.N$ points disposés de deux en deux sur deux lignes espacées de 1. Exprimez vos résultats en fonction de N.
3. On ne sait plus rien des points sauf qu'ils sont en nombre fini sur les droites $y = 0$ et $y = 1$ avec des abscisses entre 0 et X. Trouver en fonction de X une borne sur le chemin le plus court traversant tous les points en partant d'un point d'abscisse 0 pour aller à un point d'abscisse X.