4 TD

Exercice 1. Soit n un entier. Montrer que n possède un nombre impair de diviseurs, si et seulement si n est le carré d'un autre entier.

Exercice 2. Soient x et y des entiers. Montrer que $7|2x+3y$ ssi $7|5x+4y$.

Exercice 3. Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers. On appelle $k!$ le produit des entiers de 1 à k (par convention, $0! = 1$.)

Montrer que $k!(n-k)!|n!$.

Exercice 4. Pour tous entiers a et b, démontrer que $a-1|a^b-1$, et que, par ailleurs, $\frac{a^b-1}{a-1} \wedge (a-1) = b \wedge (a-1)$.

Exercice 5. Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que $12|p^2-1$.

Exercice 6. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que 2^n+3 soit un carré parfait.

Exercice 7. Soit p un nombre premier, et $1 \leq k \leq p-1$. Montrer que $p|\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

Exercice 8. Soit n un entier, on appelle F_n le n-ième nombre de Fermat : $\mathrm{F}_n = 2^{2^n}-1$. Montrer que les F_n sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 9. Soit n un entier, tel que $2n$ est la somme de deux carrés d'entiers. Montrer que n est lui-même la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 10. (Olympiades hongroises - 1978) Soit $n > 1$. Montrer que n^4+4^n n'est pas premier.

Exercice 11. (Olympiades internationales - 1986) Soit d un entier strictement positif n'appartenant pas à $\{2,5,13\}$. Montrer qu'il existe deux nombres distincts a et b dans $\{2,5,13,d\}$ tels que $ab-1$ ne soit pas le carré d'un entier.

Exercice 12. (Olympiades chinoises - 1988) Pour tout entier $n \geq 3$, on note $a(n)$ le plus petit entier positif ne divisant pas n. Si $a(n) \geq 3$, on peut réitérer ce procédé. Au bout de combien d'étapes atteint-on 2 ?

Exercice 13. Démontrer que, pour tout entier n, le réel $\sqrt{n}$ est ou bien entier, ou bien irrationnel.

Exercice 14. Montrer que pour tout nombre premier p congru à 3 modulo 4, si a et b sont tels que $p|a^2+b^2$, alors $p|a$ et $p|b$.

Le nombre 2015 est-il la somme de deux carrés ?

Exercice 15. (Olympiades bulgares - 1993) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, telle que $a_{2n} = a_n + n$ pour tout n. On suppose de plus que si a_n est premier, alors n est premier. Calculer a_{1993}.