Série 2 : Combinatoire (et échiquers)

Problème 1 On écrit au tableau le nombre 1234512345123451234512345. Effacez 10 chifres de ce nombre de tel sorte que le nombre restant (on ne tiendra pas compte des espaces entre les chiffres) soit le plus grand possible.

Problème 2

1. Dans un kiosque on peut acheter trois types d'enveloppes et 6 types de timbres. De combien de façons différentes peut-on acheter une enveloppe avec un timbre ?
2. Dans un pays il y a 20 aeroports. Ils sont tous reliés deux à deux par une ligne directe sans escale. Combien de lignes sans escale il y a dans ce pays ?
3. Combien de nombres à 4 chiffres, dont au moins un chiffre est pair, existe-t-il ?
4. Dans l'alphabet de la langue du tribu Mumbo-Jumbo il y a 3 lettres. Un mot dans cette langue est toute suite d'au plus 4 lettres. Combien de mots y a-t-il ?

Problème 3 Sur un échiquier 25×25 on a place 25 pions symétriquement à la grande diagonale. Montrez qu'un de pions est placé sur cette diagonale.

Problème 4 Dans la situation décrite dans le problème précedent, combien de dispositions différentes sont possibles

a) si les pions sont indistinguables ?
b) si les pions sont numérotés de 1 à 25 ?

Problème 5 De combien de façons différentes peut-on placer une tour noire et une tour blanche pour que l'une ne puisse pas prendre l'autre ?

Problème 6 Combien de carrés différents y a-t-il sur un échiquer ? Combien de rectangles ?

Problème 7 On jette un dé trois fois. Parmi toutes les suites que l'on puisse obtenir combien y en a-t-il de celles ou l y a au moins un 6 ?

Problème 8 Combient y a-t-il de nombres a 9 chiffres dont la somme de chiffres est paire ?

Problème 9 Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [[0, \ldots, n]]$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On obtient ainsi le triangle de Pascal.

Problème 10 Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \binom{n}{k}.$$

Problème 11 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$