Série 1 : échauffement de la rentrée

Problème 1 On a placé 44 reines sur un échiquier. Montrer que chacune d'elles bat au moins une autre.

Problème 2 Neuf cartes avec les chiffres de 1 à 9 sont disposées sur la table dans l'ordre suivant : 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3. On peut prendre quelques cartes qui se suivent et inverser leur ordre. Peut-on obtenir l'ordre de cartes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 après trois opérations de ce type ?

Problème 3

1. Donner un exemple de nombre à 7 chiffres, dont tous les chiffres sont distincts et non nuls, qui est divisible par tous ses chiffres (ou plutôt par les nombres à un chiffre correspondant à ces chiffres).
2. Existe-t-il un tel nombre à 8 chiffres ?

Problème 4 Dans un triangle ABC le point M est le milieu de $[AC]$. Montrez que si il existe un point X sur (BM) tel que $AX = CX$, alors le triangle est isocèle.

Problème 5 Montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$ (c.à.d telle que pour tout x, $f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = 3x$).

Problème 6 Soit n et p deux entiers. Combien y a-t-il d'applications injectives de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$? D'applications strictement croissantes entre ces deux ensembles ?

Problème 7 Un surfeur trop téméraire se laisse prendre par les vagues et échoue sur une île en forme de triangle équilatéral. Ce lieu lui semble un endroit rêvé et il décide de s'y installer. Il souhaite donc construire une cabane où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible car il passe beaucoup de temps à surfer sur chacune des trois plages.

Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Bonus : Qu'en serait-il si l'île était un triangle quelconque ? si l'île était un polygone régulier ?

Problème 8

1. Existe-t-il des nombres entiers a et b tels que $7a^2 - 3b^3 = 6$?
2. Trouver touts les entiers naturels n, pour lesquels l'expression $n^2 + 20n + 11$ est un carré parfait.

Problème 9 [Tiré du concours général] On appelle A l'ensemble des entiers naturels de la forme $a^2 + 3b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et B l'ensemble des entiers relatifs de la forme $a^2 + ab + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $A = B$, c'est à dire que tout élément de A est dans B et inversement.
2. Montrer que 4 divise tout élément pair de A et que le quotient de ces deux nombres est encore dans A.
3. Montrer que tout élément non nul de A est le produit d'un élément impair de A par une puissance de 4.