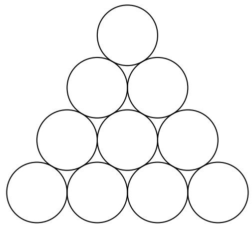
Petit échauffement de la rentrée

Problème 1

Dix pièces de vingt centimes sont placées comme indiqué ci-contre. On veut en ôter quelques-unes de façon que les pieces restantes ne soient pas de sommets d'un triangle équilatéral. Quel est le nombre minimal de pièces à ôter ?



Problème 2 Soient a et b deux entiers positifs tels que

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1}+\frac{a^2+a+2}{b^2+b+2}+\frac{a^2+a+3}{b^2+b+3}+\dots\frac{a^2+a+2015}{b^2+b+2015}=2015$$

Montrer qu'alors $a = b$.

Problème 3 Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-in choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complétement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

Problème 4 Sur une feuille quadrillée, on a tracé un polygone tel que tous ses sommets se trouvent sur les noeuds du quadrillage et aucun de ses côtés ne suit les lignes du quadrillage. Montrez que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux.

Problème 5 Montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$ (c.à.d telle que pour tout x, $f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = 3x$).

Problème 6

On inscrit sur un cercle les chiffres 1, 2, 3. Puis on itère le procédé suivant : à chaque étape, entre deux nombres existants qui se suivent sur le cercle, on inscrit leur somme (comme indiqué ci-contre). Quelle sera la somme de tous les nombres inscrits sur le cercle à l'issue de la dixième étape (en considérant comme première étape le placement de 1, 2, 3) ?

Problème 7 Résoudre l'équation

$$x-1=\left\{n\sqrt{2013}+\frac{n}{2}\right\}-\left\{n\sqrt{2013}\right\}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\{x\}$ est la partie fractionnaire du réel x, c'est-à-dire : $\{x\} = x - E(x)$ (et $E(x)$ est la partie entière de x i.e. le plus petit entier inférieur à x).