Série 4 : Raisonnement par récurrence

Problème 1.

1. Montrez qu'un carré 4×4 privé d'un carreau peut être découpé en "angles" de trois carreaux.
2. Montrez que la même chose est vraie pour tout carré $2^n \times 2^n$.

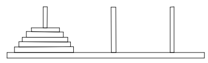
Problème 2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ pour tout $q \neq 1$;
2. $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$;
3. $1 + 4 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problème 3. (Tours de Hanoï) Le jeu des tours de Hanoï est composé de trois tours et quelques disques de taille différente posés les uns sur les autres sur une des tours (comme sur le dessin). Le but du jeu est de déplacer les disques d'une tour sur l'autre en respectant les règles suivantes :

– on ne peut pas déplacer plus d'un disque à la fois ;
– on ne peut placer sur un disque un autre qui est plus grand (on suppose que cette condition est vérifiée sur la tour de départ).

Montrez que le but du jeu peut être atteint quel que soit le nombre de disques.



Problème 4. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9 ;
2. $3^{2n+2} + 8n - 9$ est divisible par 16 ;
3. $ab^n + cn + d$ est divisible par un entier naturel m si $a + d$, $c(b-1)$ et $bd - c - d$ sont divisibles par m.

Problème 5. On a un tas de 25 cailloux. On le divise en deux et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. On repète le procédé jusqu'à obtenir 25 cailloux séparés (en notant à chaque fois le produit). Montrez que la somme de tous les nombres notés sera 300.