**Nombres réels, nombres rationnels**

**Problème 1.** Montrer que le nombre dont l'écriture décimale est $0,999...$ (une infinité de 9) est égal à 1.

**Problème 2.** Trouver l'écriture fractionnaire de $2,\overline{342} = 2.342342342342....$

**Problème 3.** Trouver l'écriture décimale de $\frac{3}{7}$, de $\frac{410}{333}$.

**Problème 4.** Soient $a_1, a_2$ des nombres dont les écritures décimales sont respectivement

1. $0,101001000100001000001...$
2. $0,123456789101112131415....$

Sont-ils rationnels ?

**Problème 5.** La somme de deux nombres rationnels est toujours rationnelle (justifiez). Est-il possible que

1. la somme de deux irrationnels soit rationnelle ?
2. la somme d'un rationnel et d'un irrationnel soit rationnelle ?

Est-ce que la même chose est vraie pour le produit ?

**Problème 6.** Existe-t-il un nombre rationnel $\alpha$ tel que $\cos\alpha$ est irrationnel mais $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$ et $\cos 5\alpha$ sont rationnels ?

**Problème 7.** On sait que $1-\sqrt{3}$ est une des racines d'une équation de la forme $x^2+ax+b=0$, où $a, b \in \mathbb{Q}$. Trouver $a$ et $b$.

**Problème 8.** Trouver tous les nombres réels $x$ tels que parmi les nombres $a = x - \sqrt{2}$, $b = x - \frac{1}{x}$, $c = x + \frac{1}{x}$ et $d = x^2 + 2\sqrt{2}$ exactement un ne soit pas un nombre entier.

**Problème 9.** Soient $x$ et $y$ deux nombres réels tels que pour tout couple $p, q$ de nombres premiers impairs, le nombre $x^p + y^q$ est rationnel. Montrer que $x$ et $y$ sont rationnels.