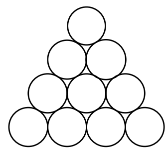
Problèmes à découvrir

Problème 1 Peut-on disposer dans l'espace six crayons (supposés aussi longs que l'on veut) de telle sorte que chacun soit en contact avec tous les autres ?

Problème 2 Peut-on tracer onze segments dans le plan de façon que chacun en coupe exactement trois autres ?

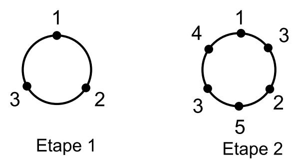
Problème 3 Dix pièces de vingt centimes sont placées comme indiqué ci-contre. On veut en ôter quelques-unes de façon qu'il n'y ait pas trois pièces dont les centres soient sommets d'un triangle équilatéral. Quel est le nombre minimal de pièces à ôter ?



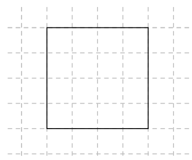
Problème 4 Dans une famille (finie) de nombres non nuls, chaque nombre est égal à la somme de tous les autres. Combien de nombres peut-il y avoir dans cette famille ? Que peut-on dire si l'un ou plusieurs de ces nombres sont nuls ?

Problème 5 Sur une feuille quadrillée on a déssiné un carré dont le côté correspond à dix carreaux. Peut-on le découper en vingt-cinq rectangles de format 1×4 ?

Problème 6 On inscrit sur un cercle les chiffres 1, 2, 3. Puis on itère le procédé suivant : à chaque étape, entre deux nombres existants qui se suivent sur le cercle, on inscrit leur somme (comme indiqué ci-contre). Quelle sera la somme de tous les nombres inscrits sur le cercle à l'issue de la dixième étape (en considérant comme première étape le placement de 1, 2, 3) ?



Problème 7 Peut-on découper le carré ci-contre en cinq parties égales (isométriques) ?



Problème 8 Une droite est coloriée à l'aide de deux couleurs (sans superposition). Montrez qu'il existe un segment dont les extrémités et le milieu sont de même couleur.

Problème 9 On a neuf pièces de monnaie de même valeur, dont on sait que l'une est fausse (plus lourde que les autres). On veut retrouver la fausse pièce en utilisant une simple balance. Comment le faire en deux pesées ?

Problème 10 On considère un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de rayon un. Montrez que la longueur de son côté le plus court ne peut être supérieure à $\sqrt{2}$. La même chose vaut-elle pour un quadrilatère croisé ?

Problème 11 Une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est strictement monotone et vérifie les deux conditions suivantes :

1. $f(2) = 2$;
2. $f(mn) = f(m)f(n)$ quels que soient les entiers m et n.

Montrez que f est la fonction identité (c'est-à-dire que $f(n) = n$ pour tout n).

Problème 12 Sur une île vivent, exclusivement, des chevaliers et des menteurs. Les chevaliers disent toujours la vérité et les menteurs mentent toujours. Un voyageur est arrivé sur cette île et il a engagé un guide. Un jour le voyageur a vu au loin un habitant de l'île et a envoyé son guide lui demander qui il est. Le guide est revenu en disant : "Il m'a dit qu'il est un menteur". Peut-on savoir si le guide est un chevalier ou un menteur ?

Problème 13 Deux joueurs jouent au jeu suivant : ils disposent de deux tas de pierres, de dix pierres chacun. Chaque joueur à tour de rôle prend un nombre quelconque de pierres, mais uniquement d'un seul tas. Celui qui prend la (les) dernière(s) pierre(s) a gagné. L'un des joueurs peut-il avoir une stratégie gagnante (lui permettant de gagner indépendement de ce que fait l'autre joueur) ?