Université de Strasbourg
Département de mathématiques

Nicolas Juillet
Cercle Mathématique

Séance du 19 décembre
Des questions d'optimisation géométrique

Dans cette fiche la difficulté des questions varie, allant de abordable à trop difficile. Certaines questions sont ouvertes, c'est-à-dire soit que je ne connais pas la réponse, soit que personne ne la connait ! La prochaine séance aura lieu le 9 janvier.

1 Optimisation sur la droite réelle.

1. Taxi 1

Vous êtes à la tête d'une équipe de taxis qui opère sur une seule route. Vous devez déplacer trois voitures qui se trouvent aux bornes kilométriques 2, 5 et 10 vers les emplacements 0, 6 et 7. Vous êtes libres de coordonner les mouvement comme vous le désirez.

1. Combien y a-t-il de façons d'effectuer la manoeuvre ? Quelle est la meilleure manière (celle qui nécessite le moins de kilomètres au total) ?
2. Même question si les destinations sont 6,12 et 15.
3. Comment faire pour deux taxis, deux points de départ et deux destinations (sans présumer des emplacements respectifs).

2. Taxi 2

On reprend l'exercice précédent mais dans un contexte plus abstrait. C'est la somme des trois distances *au carré* qui nous intéresse désormais. Par exemple si on envoie 2 sur 3, 5 sur 0 et 10 sur 7 le total est $35 = 1^2 + 5^2 + 3^2$.

1. Reprendre l'exo précédent
2. Comment faire dans le cas (quasiment général) de 26 taxis, 26 points de départs et 26 points d'arrivée.
3. Essayez de répondre à la question 2 dans le cadre de l'exercice précédent (somme des distances sans carré).

3. Réarrangement

Vous avez eu les notes 15,10 et 13 lors du trimestre et on vous donne le droit de choisir les coefficients à affecter à ces notes pour faire la moyenne. Une des notes devra être affectée du coefficient 3, une autre du coefficient 2 et la dernière du coefficient 1.

1. Combien y a-t-il de choix possibles et lequel vous donne la meilleure moyenne ?
2. Sauriez vous démontrer cela ?
3. Comment peut-on généraliser ce résultat avec plus de notes et de coefficients ? (Voir aussi la question suivante)
4. Ce problème et le problème précédent sont en fait les mêmes si on les transforme. Sauriez-vous démontrer pourquoi ?

2 Optimisation dans le plan

4. Définitions et exercice d'introduction

Soit des points du plan en nombre fini. On relie certains de ces points par des segments. Un *chemin* sera une suite de points reliés par des segments. Un *parcours* sera un chemin dont le premier et le dernier point sont les mêmes. Un *vrai parcours* est un parcours pour lequel on ne repasse pas deux fois par le même point (sauf à la fin). On dit que les points sont *appariés* si les points tous sont reliés deux par deux. (Un seul segment part de chaque point.)

1. Montrer que pour relier globalement N points entre eux, on a toujours besoin d'au moins $N-1$ segments, c'est-à dire qu'on ne peut pas relier tous les points avec moins de (ni même exactement) $N-2$ segments.
2. Montrer que si N points sont globalement reliés par $N-1$ segments, il n'y a pas de vrai parcours.
3. Montrer que si N points sont globalement reliés par N arrêtes ou plus il est possible d'enlever une arrête et de conserver le caractère relié.

5. Regroupements

On prend 600 points distincts dans le plan tels que trois points ne sont jamais alignés.

1. Montrer qu'il existe une droite qui sépare le plan en régions de 300 points
2. Montrer qu'il est possible d'apparier les points de telle façon que les segments ne s'intersectent pas.
3. Montrer qu'il existe un vrai circuit reliant tous les points sans s'auto-intersecter.
4. Est-il possible de former 200 triangles qui ne s'intersectent pas ?

6. Lignes de niveau

On prend A et B des points du plan fixés. On associe à chaque point du plan D une altitude (ou hauteur) $h(D)$. Comme sur une carte géographique les lignes de niveau sont des lignes passant par les points de même altitude.

1. Quelle sont les lignes de niveau si la hauteur est définie par $h : D \mapsto AD^2 + BD^2$? (utiliser le produit scalaire en passant par le milieu de AB)
2. Quelles sont les ligne de niveau de $h : D \mapsto AD + BD$? (faire à la maison avec une ficelle)

7. Un exercice auquel je ne sais pas répondre

On prend N points dans le carré de sommets $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,0)$ et $D = (1,1)$. Montrer qu'il est possible de les relier globalement par un parcours de longueur inférieure à $10\sqrt{N}$.

8. Sacré Pyth !

Il est sans doute plus simple de répondre à la question 1 en premier.

1. Soit ABC un triangle rectangle d'hypothénuse AB. On considère des points en nombre fini dans le triangle parmi lesquels A et B. Monter qu'il existe un chemin de A à B passant par tous les points tel que la somme des longueurs de segment au carré est inférieure à AB^2.
2. Comme dans l'exercice précédent, on prend de nouveau N points dans le carré. Montrer qu'il existe une façon de les relier globalement telle que la somme des distances au carré est inférieure à 4 !

3 Questions ouvertes en rapport avec l'exercice 8

Il existe un problème ouvert formulé par Jean-Pierre Kahane dans son exposé aux "leçons de mathématique d'aujourd'hui" organisées par l'Université de Bordeaux. Il s'agit de trouver la borne remplaçant 4 dans l'exercice 8 lorsque les points sont pris dans un autre polygone convexe. Voici des questions qui pourrait faire avancer le problème.

9. Un losange

Comme dans le début de l'exercice 8, on considère des points dans une région du plan et on souhaite aller de A à B en passant par tous les points, de sorte que la somme des longueurs de segment au carré est petite. La région est un losange obtenu en accolant deux triangles de côté 1 et A à et B sont les pointes aigues du losange. Je pense qu'on peut faire en sorte que la somme des longueurs au carré soit plus petite que 3.

10. Deux lignes

- On considère les 10 points du plan de coordonnée (a, b) où $a = 0, 2, 4, 6$ ou 8 et $b = 0$ ou 1. Trouver un chemin dont la somme des longueurs des côtés au carré est la plus petite possible, qui commence par $(0, 0)$ et finit par $(8, 0)$ ou $(8, 1)$.
- Même défi pour $2.N$ points disposé de deux en deux sur deux lignes espacées de 1. Exprimez vos résultats en fonction de N.
- On ne sait plus rien des points sauf qu'ils sont en nombre fini sur les droites $y = 0$ et $y = 1$ avec des abscisses entre 0 et X. Trouver en fonction de X une borne sur le chemin le plus court traversant tous les points en partant d'un point d'abscisse 0 pour aller à un point d'abscisse X.

4 Mariages

11. Activité

Nous illustrerons tout d'abord le lemme des mariages sur un exemple. Nous énoncerons ensuite ce lemme célèbre et nous parviendrons peut-être à le démontrer.