

**Marathon 14/12/2011**

**Problème 1** Est-il possible de tracer une ligne brisée de 9 segments telle que chaque segment coupe un en et un seul autre ?

**Problème 2** Quel est le reste de la division de  $9^{100}$  par 8 ?

**Problème 3** Existe-t-il un graphe de 5 sommets dont les degrés sont 4,4,4,4,2 ?

**Problème 4** Soit 6 pièces de monnaie, dont 2 fausses (plus légères que les vraies). Trouvez les deux pièces en trois pesées sur une balance simple.

**Problème 5** Le nombre 15 est écrit au tableau. On a ajoutée un chiffre au début et un chiffre à la fin et on a obtenu un nombre qui est divisible par 15. Quelles peuvent être ces chiffres ?

**Problème 6** Les entiers  $x$  et  $y$  sont tels que  $34x = 43y$ . Montrez que  $x + y$  n'est pas un nombre premier.

**Problème 7** On écrit un nombre au tableau. A chaque étape on peut soit le multiplier par 2 soit effacer son dernier chiffre. Comment obtenir 14 en partant de 458 ?

**Problème 8** Une droite est coloriée en deux couleurs. Montrez qu'il existe un segment tel que ses extrémités et son milieu sont de même couleur.

**Problème 9** Les nombres de 1 à 20 sont écrits au tableau. Deux personnes jouent au jeu suivant : chacun place à tour de rôles soit un + soit un - entre n'importe quels deux nombres. Quand tous les signes sont placés on calcule le résultat. S'il est pair, c'est le premier qui gagne, sinon c'est le deuxième. Est-ce que un de deux joueurs a une stratégie gagnante (peut gagner quoi que l'autre fasse) ?

**Problème 10** Soient  $A$  et  $B$  deux points. Montrez que quels que soient les 45 points de la droite  $(AB)$  n'appartenant pas au segment  $[AB]$  la somme de leurs distances à  $A$  n'est pas égale à la somme de leurs distances à  $B$ .

**Problème 11** Etant donné 6 points dans un rectangle  $3 \times 4$  montrez qu'il y en a 2 tels que la distance entre eux est inférieure à  $\sqrt{5}$ .

**Problème 12** Trouvez le plus petit entier naturel tel que son reste de la division par 2 est 1, de la division par 3 est 2, de la division par 4 est 3, de la division par 5 est 4 et de la division par 6 est 5.

**Problème 13** Montrez que on ne peut pas paver un carré  $10 \times 10$  par des T-tetraminos.

**Problème 14** Quelques droites coupent un plan en plusieurs parties. Montrez que ces parties peuvent être coloriées en deux couleurs de telle sorte que toutes deux parties voisines (c.a.d. ayant un segment de leur frontière en commun) sont de couleurs différentes.

**Problème 15** Le nombre  $\overline{abc}$  est premier. Montrez qu'alors  $b^2 - 4ac$  n'est pas un carré.