Marathon.

Problème 1 Une petite araignée monte sur un poteau de lampadaire. Le poteau mesure 7,5 m. Pendant la journée l'araignée monte 1 m, mais la nuit le poteau devient humide à cause du brouillard et l'araignée glisse de 25 cm. A quel moment l'araignée arrive-t-elle en haut du poteau ?

Ne pas se tromper et dire que c'est 75 cm par jour donc 10 jours (on peut modifier les données pour varier la réponse)

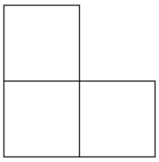
Problème 2

De combien de façons peut-on écrire 2015 comme somme d'entiers consécutifs ?

Écrire la somme de k nombres consécutifs $\dfrac{k(n+k-1)}{2}$ *puis regarder comment on peut obtenir* $2015 = 3 \times 11 \times 61$.

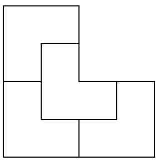
Problème 3

1. Découper la figure suivante (composée de 3 carrés identiques) en 4 figures de même forme mais plus petites.



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Découper un carré de côté 2^n dont on a découpé le "coin" (un carré 1×1) en des figures composées de 4 carrés 1×1 comme dans la question précédente.

Réponse :



Problème 4

Montrez que on ne peut pas paver un carré 10×10 par des T-tetraminos.

Problème 5

On a 101 pièces de monnaie dont on sait que 50 sont fausse (une pièce fausse pèse 1 g de moins qu'une vraie). On en choisit une au hasard et on veut savoir si elle est vraie ou fausse. Peut-on le faire en une feule pesée en utilisant une balance qui indique la différence entre les poids de deux plateaux ?

Prendre les 100 pièces restantes, les partager en deux groupes de 50. si la pièce sélectionnée est vraie, alors dans les deux tas il y a autant de vraies que de fausse, donc la différence sera paire. Sinon elle sera impaire.

Problème 6

Trouver toutes les solutions entière de l'équation $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

Mettre 3 de l'autre côté puis factoriser

Problème 7 Treize caméléons gris, quinze caméléons marrons et dix-sept caméléons blancs vivent dans le pays de Grimarblanc. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur et prennent automatiquement la troisième couleur. Se peut-l qu'au bout d'un certain temps tous les caméléons soient de même couleur ?

Quand deux caméleons se rencontrent, la diférence entre les nombres de caméléons de deux couleurs de différentes soit reste la même, soit augmente de 3. Donc les differences sont invariantes modulo 3. Au depart les differences sont 2, 2 et 4, donc il est impossible d'obtenir 0, 45 et 45.

Problème 8

Dans une famille (finie) de nombres dont la somme est non nul, chaque nombre est égal à la somme de tous les autres. Combien de nombres peut-il y avoir dans cette famille ?

Si a_1,..., a_n est cette famille, alors $\forall i$ $2a_i \sum_1^n a_k$*. Donc* $2\sum_1^n a_i = n\sum_1^n$ *donc* $n = 2$.

Problème 9 Sur une feuille quadrillée, on a tracé un polygone tel que tous ses sommets se trouvent sur les noeuds du quadrillage et aucun de ses côtés ne suit les lignes du quadrillage. Montrez que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux.

C'est un problème que j'aime bien, mais je ne sais pas s'il est si facil d'acces...

Solution : Cette somme est égale à l'aire du polygone (si on suppose que le quadrillage est de côté 1). En effet, les lignes verticales (ou horisontales) du quadrillage decoupe le polygone en quelques triangles (deux si le polygone est convexe) et quelques trapèzes. La hauteur de tous les triangles et trapèzes est un. On fait la somme et on obtient la somme de longueurs.

Problème 10 Pour quels chiffres x existe-t-il un carré qui se termine par xx ? Et par xxx ?

textitTous les nombres qui commencent par 1, 2, ou 3 sont plus petits que 43521, donc tout l'ordre d'autres chiffres n'est pas important. Il y en a $3 \times 4! = 72$. De même tous les nombres qui commencent par 41 ou 42 sont plus petit. Il y en a $2 \times 3! = 12$. Il faut aussi ajouter ceux qui commencent par 431 ou 432 : $2 \times 2! = 4$ et le nombre 43512. En tout 72+12+4+1=89. Donc le numéro est 90.

Problème 11 Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444}, et B la somme des chiffres de A. Quelle est la somme des chiffres de B ?

Solution : si *log* est le logarithme en base 10, on a les inégalités naturelles suivantes :

$$A \leq 9\lceil \log(4444^{4444}) \rceil \leq 9 \times 4444 \times 3,65.$$

On a donc à nouveau

$$B \leq 9\lceil \log(A) \rceil \leq 9\lceil 0,95 + 3,65 + 0,56 \rceil = 54.$$

Donc la somme des chiffres de B est plus petite que 13.

Par ailleurs, $4444^{4444} \mod 9 = (-2)^{-2} = 5^2 = 7$.

Donc la somme des chiffres de B est ou bien 7, ou bien supérieure à 16. Finalement c'est 7.

Problème 12 Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Démontrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq ab$, il existe des entiers naturels x et y tels que $n = ax + by$.

Solution : On sait qu'on peut trouver des entiers *relatifs* vérifiant cette relation (c'est Bézout). Mais x et y ne peuvent pas être simultanément négatifs, car n est positif.

Si par exemple $x < 0$, alors on remplace x par $x + b$ et y par $y - a$. On peut recommencer cette opération autant de fois qu'on le souhaite, donc on peut supposer que $x < 0$, mais $x + b \geq 0$. Alors $by > n = ab$ donc $y > a$. Finalement $x + b \geq 0$ et $y - a \geq 0$, donc on a bien trouvé deux entiers naturels qui correspondaient.