Un peu de gymnastique

L'outil principal dans tous ses exercices sont les différentes identités remarquables. Parfois les expressions sont sous la forme qui met en evidence l'identité a utiliser, mais parfois pas. Par exemple l'expression $5+2\sqrt{6}$ peut cacher le carré de la somme : $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. Il peut parfois aussi etre utile de "se débarasser de l'irrationnalité dans le dénominateur" dans une fraction en mulipliant par ce qu'on appelle **quantité conjuguee** :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}\ \text{etc}$$

Parfois on peut aussi être amené à faire la meme chose dans le numérateur.

Exercice 1 Un petit echauffement : calculer sans utiliser de calculatrice

1. $\dfrac{(7-6,35):6,5+9,9}{\left(1,2:36+1,2:0,25-\frac{21}{16}\right):\frac{160}{24}}$;
2. $\dfrac{\left(5+\frac{4}{45}-\frac{25}{6}\right):\left(5+\frac{8}{15}\right)}{\left(4+\frac{2}{3}+0,75\right)}\cdot\left(34+\dfrac{2}{7}\right)+\dfrac{0,3:0,01}{70}+\dfrac{2}{7}$;
3. $\dfrac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}$;

Exercice 2 Simplifier (c.à.d. écrire sous la forme la plus simple possible) les expressions algébriques suivantes, en supposant que les expressions de départ ont un sens :

1. $\dfrac{x^4+2x^2-3x+1}{x^2+\sqrt{3x}+1}+2\left(\sqrt[6]{27x^3}-\dfrac{1}{2}\right)$;
2. $\dfrac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\dfrac{8ab}{a^2-4b^2}+\dfrac{2b}{a-2b}$, $0<a<2b$;
3. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;
4. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}^{-2})+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}^{-2})):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$;
5. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$;
6. $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;
7. $\dfrac{x\mid x-3\mid+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$;
8. $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$

Exercice 3 Vérifiez les égalités suivantes :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;
2. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$;
3. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$;
4. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}$;
5. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.