

Isométries et groupes

Problème 1. On considère le carré $ABCD$ de centre O . Il y a quatre rotations de centre O qui transforment ce carré en lui-même : $e = id$ (rotation d'angle 0), $r_1 = \rho_{O, \pi/2}$, $r_2 = \rho_{O, \pi}$ et $r_3 = \rho_{O, 3\pi/2}$. Remplir la table de compositions :

| | | | | |
|-------|---|-------|-------|-------|
| | e | r_1 | r_2 | r_3 |
| e | | | | |
| r_1 | | | | |
| r_2 | | | | |
| r_3 | | | | |

Problème 2. On veut étudier les isométries d'un triangle équilatéral ABC .

1. Décrire toutes les isométries de ce triangle
2. Faire la table de composition de ces isométries.

Problème 3. Soit $n \geq 3$. On considère un polygone régulier P de centre O à n côtés.

1. Combien de rotations de centre O envoient p sur lui-même ?
2. Combien d'isométries le polygone P possède-t-il ?

Problème 4. Soit $ABCD$ de centre O . On considère deux rotations a et b de centre O et une symétrie axiale c qui transforment ce carré en lui-même. Montrez que les deux applications $a \circ b$ et $b \circ (c \circ a)$ sont des isométries du carré distinctes.

Problème 5. Trouvez toutes les isométries du rectangle $KLMN$ qui n'est pas un carré et formez la table de composition de ces isométries.

Problème 6. Les opérations suivantes sont-elles associatives ? commutatives ? Si elles en possèdent un, donner l'élément neutre.

1. L'addition dans \mathbb{R}
2. La soustraction dans \mathbb{R}

Problème 7. Parmi les opérations suivantes, lesquelles sont des Loi de Composition Internes

1. L'addition dans \mathbb{N} ? dans \mathbb{Z} ? dans \mathbb{R}^* ?
2. La multiplication dans \mathbb{N} ? dans \mathbb{Z} ? dans \mathbb{Q}^* ?
3. La soustraction dans \mathbb{N} ? dans \mathbb{Z} ? dans \mathbb{Z}^* ?

Problème 8. Soit (G, \star) un groupe. Montrer les deux propositions suivantes

1. L'élément neutre de G est unique
2. Pour tout $x \in G$, x^{-1} est unique

Problème 9. Soient (G, \star) un groupe, $x \in G$ et $y \in G$. Déterminer $(x \star y)^{-1}$.

Problème 10. L'ensemble d'isomorphismes d'un triangle équilatéral est-il un groupe ? Et l'ensemble d'isomorphismes d'un carré ? d'un polygone régulier quelconque ? D'un rectangle non carré ?