Groupes, Sous-Groupes, Isomorphismes

Voici quelques définitions nécessaires pour la feuille dur les groupes.

Isométries

Définition 1. *On appelle* ***isométrie*** *du plan toute transformation qui conserve les distances.*

Il y a trois types d'isométries :
— translations
— rotations
— symétries axiales.

La composition de deux transformations est l'application de l'une apres l'autre. P.ex. si $\rho_{\pi/2}$ est une rotation d'angle $\pi/2$ autour d'un point Oet s est une symétrie axiale d'axe d, alors l'ecriture $\rho \circ s$ signifie qu'on fait d'abord la symétrie par rapport à d et ensuite on tourne l'image de la symétrie de $\pi/2$ autour de O.

Groupes

Définition 2. *Soit un ensemble G. On appelle* ***loi de composition interne (LCI)*** *toute application $* : G \times G \longrightarrow G$.*

Exemples :

1. L'addition, la soustraction et la multiplication sont des LCI sur $\mathbb{R}$.
2. La division n'est pas une LCI sur $\mathbb{R}$, car l'application définie par $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et pas sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. L'addition n'est pas une LCI sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ car la somme de deux entiers peut être 0.
4. La soustraction est une LCI sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{N}$.

Définition 3. *On dit que une LCI $* : G \times G \longrightarrow G$ est* ***commutative*** *si pour tout couple d'éléments $a \in G$ et $b \in G$ on a $a * b = b * a$.*

Exemples :

1. L'addition et la multiplication sont commutatives sur tous les ensembles de nombres que vous connaissez.
2. La soustraction n'est pas commutative.
3. La multiplication de matrices n'est pas commutative.

Définition 4. *On dit que une LCI $* : G \times G \longrightarrow G$ est* ***associative*** *si quelque soient $a, b, c \in G$ on a*

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Exemples :

1. L'addition et la multiplication sont associatives sur tous les ensembles de nombres que vous connaissez.
2. La soustraction et la division ne sont pas associatives.

Définition 5. *Soit G un ensemble muni d'une LCI $*$ (on le note $(G, *)$). On dit que $(G, *)$ est* ***un groupe*** *si*

1. *$*$ est une LCI associative ;*
2. *il existe $e \in G$ tel que quel que soit $a \in G$ $a * e = e * a = a$ (on appelle un tel élément e* ***l'unité de*** *G)*
3. *pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$ (on dit alors que y* ***est l'inverse de*** *x).*

Définition 6. *Soit $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble de G. On dit que H* ***est un sous-groupe de*** *G si $(H, *)$ est un groupe.*