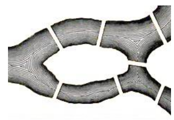
Série 3 : Puissances d'un sommet et les graphes eulériens

Problème 1 Puissance d'un sommet et nombre d'arêtes.

1. Quelle est la somme des puissances de tous les sommets d'un graphe qui a n sommets et m arêtes ?
2. Quelle est la somme des puissances de tous les sommets d'un graphe complet à n sommets ?
3. Combien d'arêtes a un tel graphe ?
4. Montrez que le nombre de sommets dont la puissance est impaire est pair.

Problème 2 Montrez que tout graphe à n sommets dont la puissance de chaque sommet est supérieure à $\frac{1}{2}(n-1)$ est connexe (c.a.d. il existe un chemin qui relie n'importe quels deux sommets).

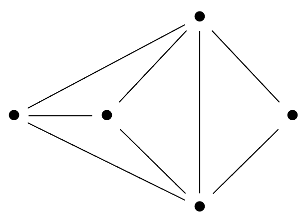
Problème 3 Ponts de Königsberg : Dans la ville de Königsberg, dont le plan est presenté ci-contre, peut-on faire une promenade en parcourant chaque pont une fois et une seule ?



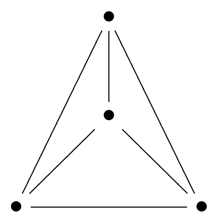
Définition 1. – *On dit qu'un chemin dans un graphe est* ***eulérien*** *s'il passe par tous les sommets et emprunte chaque arête une et une seule fois.*
– *On dit qu'un graphe est* ***eulérien*** *s'il contient un cycle qui est un chemin eulérien*

Problème 4 Est-ce que les graphes suivants sont eulériens ? Contiennent-ils un chemin eulérien ?

a)



b)



Problème 5 Trouvez une condition nécessaire pour qu'un graphe soit eulérien.

Problème 6 Dans un archipel les îles sont reliées par des ponts de sorte que l'on puisse aller de n'importe quelle île à n'importe quelle autre. Un touriste a fait le tour de l'archipel en passant une et une seule fois par chaque pont. Ce faisant il a visité une île trois fois. Combien de ponts mènent à cette île si

a) Ce n'était pas ni l'île de départ ni celle d'arrivée de son tour ?
b) C'était l'île de départ mais pas l'île d'arrivée ?
c) C'etait l'île de départ et d'arrivée ?