

**Méli-mélo de problèmes**

**Problème 1** Dans un triangle isocèle la bissectrice issue du sommet principal est deux fois plus courte que celle issue d'un sommet de la base. Quels sont les angles de ce triangle ?

**Problème 2** Après un tournoi d'échecs où 20 joueurs ont joué une fois chacun avec chacun, un journaliste a écrit que chaque participant de ce tournoi a eu autant de parties gagnées que de parties nulles. Montrez qu'il s'est trompé.

**Problème 3** Supposons que l'on n'a pas de compas, mais on a une règle graduée et un gabarit d'un triangle quelconque (c.a.d. un triangle qui n'est pas ni rectangle ni isocèle). Comment peut-on réaliser les constructions suivantes à l'aide de ces deux outils seulement :

1. La médiatrice d'un segment donné.
2. La bissectrice d'un angle donné.
3. Un carré de côté donné.
4. Une droite parallèle à la droite donnée passant par un point donné.

**Problème 4** On veut colorier les cases d'un tableau  $8 \times 8$  de telle sorte que chaque case ait un côté commun avec au moins deux autres cases de même couleur. Quel est le nombre maximal de couleurs qu'on puisse utiliser ?

**Problème 5** Deux sentinelles patrouillent une tour ronde à vitesse constante. La vitesse du premier soldat est deux fois supérieure à celle du deuxième. Dans le mur de la tour il y a quelques meurtrières et sa longueur est 1. On dit que le système de ces meurtrières est fiable si à tout moment ou moins une de deux sentinelles est devant une meurtrière.

1. Quelle doit être la longueur minimale d'une meurtrière pour qu'elle constitue un système fiable à elle seule ?
2. Montrez que la longueur totale de toutes les meurtrières d'un système fiable est supérieure à  $1/2$ .
3. Montrez que pour tout  $s > 1/2$  il existe un système fiable dont la longueur totale de meurtrière est inférieure à  $s$ .

**Problème 6** Les segments joignant les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  sont perpendiculaires,  $AC = 4$ ,  $\angle CAB + \angle DBA = 60^\circ$ . Trouvez l'aire de  $ABCD$ .