La rentrée 2017 : un peu de tout

Problème 1. Comment trouver le centre d'un cercle donné avec un compas et une règle ? Est-il possible de trouver le centre avec la règle uniquement ?

Problème 2. En n'utilisant qu'une règle à bords parallèles (qui permet de tracer une droite, bien évidemment, ainsi que deux droites parallèles dont la distance est égale à la largeur de la règle) construire :

1. la bissectrice d'un angle donné ;
2. la médiatrice d'un segment $[AB]$ dont la longueur est strictement plus grande que la largeur de la règle ;
3. la droite perpendiculaire à la droite donnée passant par un point donné sur cette droite ;
4. la division d'un segment $[AB]$ dont la longueur est strictement plus grande que la largeur de la règle en n parts égales (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

N'oubliez pas de justifier vos constructions !

Problème 3. Est-il possible de placer 25 nombres réels dans un tableau 5×5 de sorte que la somme de nombres dans chaque colonne soit strictement positive et la somme de nombres dans chaque ligne soit strictement negative ?

Problème 4. Sur un échiquier est placé une tour (sur une case quelconque). Deux joueurs A et B bougent alternativement la tour avec la contrainte qu'elle ne doit jamais se trouver sur une case déjà « visitée ». Le joueur qui ne peut plus bouger la tour perd. Qui peut gagner si une case est « visitée » signifie

1. que la tour s'y trouvait déjà posée à la fin d'un des mouvements précédents ;
2. que la tour y est déjà passée, que ce soit à la fin d'un mouvement ou bien lors d'un mouvement (la tour laisse une trace en se déplaçant).

Problème 5. On appelle « pavage du plan » un découpage du plan en parties isométriques (identiques à rotation ou symétrie près) sans recouvrements ni trous.

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peuvent paver le plan.
2. Existe-t-il des pentagones permettant un pavage complet du plan ?

Problème 6. Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une « voisine » allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-in choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complétement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

Problème 7. Alice possède 15 oiseaux et un certain nombre de cages. Un jour, elle décide de placer ces oiseaux dans cinq cages, avec trois oiseaux dans chaque cage.

A partir du lendemain, tous les jours, elle prend un oiseau dans chaque cage occupée, et place ces oiseaux dans une nouvelle cage. Cette opération libère éventuellement certaines cages, qui ne contenaient qu'un oiseau la veille.

Au bout de 365 jours, combien de cages seront occupées par les oiseaux ? On supposera que les oiseaux ne se reproduisent pas et ne meurent pas entre temps.

L'année suivante (il y a toujours 15 oiseaux), Alice décide de placer initialement ses oiseaux d'une autre manière. Combien de cages seront occupées au bout de 365 jours ?

Problème 8. Bob a 2017 jetons blancs, 500 jetons rouges et 1000 jetons noirs sur une table (et encore d'autres jetons de ces trois couleurs dans une boîte).

Il joue au jeu suivant : il prend deux jetons de couleur différente sur la table et les remplace par un jeton de la troisième couleur. Il continue ainsi jusqu'à ce que tous les jetons sur la table soient de la même couleur, en essayant d'en avoir le moins possible.

Combien de jetons seront sur la table à la fin de la partie si Bob joue parfaitement ? Sait-on de quelle couleur ils seront ?