

Série 1 : La divisibilité, mais pas seulement

Problème 1 Un boulanger a un sac de farine qui pèse 24 kg. Il veut prendre 9 kg de farine, mais il n'a qu'une balance simple (sans aiguille). Que doit-il faire ?

Problème 2 Montrez que si le produit de 22 nombres entiers vaut 1 leur somme est non nulle.

Problème 3 Un cavalier est parti de la case **a1** et au bout de quelques sauts il y est revenu. Montrez qu'il a fait un nombre pair de sauts.

Problème 4 Trouver dix entiers naturels tels que la somme de six d'entre eux ne soit jamais divisible par 6. Est-ce possible avec onze entiers ?

Problème 5

1. On considère un nombre qui s'écrit $\overline{a5a5a5a5a5a}$. Quelle valeur donner à a pour que la somme des chiffres de ce nombre soit multiple de 7 ?
2. Un nombre s'écrit sous la forme $\overline{e97f}$ dans la base 10 et la somme de chiffres de ce nombre est 29.
 - (a) Donnez tous les couples de valeurs possibles pour e et f .
 - (b) Parmi tous ces nombres y a-t-il un (ou plusieurs) divisible par 3 ? Par 11 ?
 - (c) On suppose maintenant que le produit des chiffres de ce nombre est égal à 2268 et que ce nombre est divisible par 7. Quelles sont alors les couples de e et f qui conviennent ?

Problème 6 Pierre a un verre de lait et un verre de thé. Il prends trois cuillères de lait, les verse dans le verre de thé, mélange bien, puis reverse trois cuillères de mélange dans le verre de lait. Est-ce qu'il y a maintenant plus de thé dans le verre de lait ou de lait dans le verre de thé ?

Problème 7 Montrez que deux entiers naturels a et b ont le même reste de la division par le même entier n si et seulement si $a - b$ est divisible par n .

Problème 8 Démontrez les critères de divisibilité par 3 et par 9 : un nombre entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

Problème 9 Est-il vrai que

1. Si un nombre est divisible par 3 et par 4 alors il est divisible par 12.
2. Si un nombre est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 24.

Problème 10 Trouvez tous les entiers naturels qui sont divisibles par 18 et qui ont exactement 15 diviseurs.

Problème 11 Soient a et b deux entiers naturels. Est-il vrai que si a^a divise b^b alors a divise b .

Problème 12 Est-ce qu'un nombre de 300 chiffres qui s'écrit avec 100 zéros, 100 uns et 100 deux peut être un carré ?

Problème 13 Soit n un nombre entier positif. Est-ce que $n!$ peut se terminer par exactement 5 zéros ?

Problème 14 Par combien de zéros se termine $100!$?

Problème 15 Existe-t-il des entiers a et b tels que $ab(a - b) = 45045$?

Problème 16 Prouver qu'un rectangle de $m \times n$ cases peut être recouvert, sans chevauchement ni débordement, par des pièces de la forme ci-contre si et seulement si $m, n > 1$ et mn est un multiple de 8.

