Quelques stratégies de base : parité, principe de Dirichlet et logique.

Problème 1. Existe-t-il une ligne brisée fermée, composée de 11 segments, telle que chaque segment coupe exactement un autre ?

Problème 2. Montrer que si un polygone à 101 côtés a un axe de symétrie alors cet axe passe par un sommet de ce polygone. Que peut-on dire pour un polygone à 100 côtés qui a un axe de symétrie ?

Problème 3. Dans un sac, il y a des boules blanches et des boules noires. Combien de boules faut-il sortir du sac pour être sûr d'avoir deux boules d'une même couleur ? Même question si dans le sac il y a des boules de 3 couleurs différentes.

Problème 4. Montrer que parmi 12 nombres entiers il y en a forcément deux tels que leur différence est divisible par 11.

Problème 5. On a stocké 3 variétés de pommes dans 25 cagettes (dans chaque cagette, il n'y a que des pommes d'une même variété). Montrer qu'il y a au moins 9 cagettes d'une même variété.

Problème 6. Alex a placé 51 points dans un carré de côté 1 mètre. Montrer que Laura peut en cacher au moins trois à l'aide d'un carré de côté 20 centimètres.

Problème 7. Soit n un entier naturel non nul. Un tableau $n\times(n+1)$ (c.à.d. n lignes et $n+1$ colonnes) est rempli avec des nombres entiers. Montrer qu'on peut enlever quelques colonnes (mais pas toutes, bien évidemment), de sorte que dans le nouveau tableau la somme des nombres dans chaque ligne soit paire.

Problème 8. Tatiana a choisi 52 entiers, et a calculé leurs carrés. Montrer qu'elle peut toujours choisir, parmi ces carrés, deux nombres dont la différence est divisible par 100.

Problème 9. Montrer que dans un groupe de six personnes, il y en a soit trois qui se connaissent deux à deux, soit trois qui ne se connaissent pas deux à deux.

Problème 10. On dispose de trois boîtes noires :
- — La première prend un couple d'entiers (a,b) et retourne deux couples (a,b) et $(a+1,b+1)$.
- — La deuxième prend un couple d'entiers pairs (a,b) et retourne deux couples (a,b) et $(a/2,b/2)$.
- — La troisième prend deux couples d'entiers (a,b) et (b,c) et retourne trois couples (a,b), (b,c) et (a,c).

Est-ce que l'on peut obtenir le couple $(10,2012)$ en partant du couple $(3,18)$?

Problème 11. Un garde du pénitencier a entendu une grosse explosion dans la cellule des Dalton. Au moment où il entre, Jo dit : « c'était pas moi ! » Puis Jack dit : « C'était Averell ! » William répond : « Non, c'était Jack ! » Enfin, Averell déclare : « Jack est un menteur ! »

Seul l'un d'entre eux dit la vérité. Qui a malencontreusement fait sauter la dynamite ?

Problème 12. Ga, Bu, Zo et Meu ne sont pas très fiables. Certains d'entre eux sont des menteurs invétérés, d'autres disent toujours la vérité. On leur demande « combien y a-t-il de menteurs parmi vous ? » Ga dit qu'il y a un menteur, Bu dit qu'il y a en a deux, Zo dit qu'il y en a trois et Meu dit qu'il y en a quatre. A qui peut-on faire confiance ?

Problème 13. Parmi Alice, Bob, Charles et Diane, il y a exactement deux menteurs.
- — Alice : « Si Charles ment et Bob dit vrai, alors Diane ment. »
- — Bob : « Diane ne dit pas la vérité si et seulement si parmi Charles et Alice il y a exactement un menteur. »
- — Charles : « Si Alice ou Diane mentent, alors Bob ne dit pas vrai. »
- — Diane : « Parmi Alice et Bob, il y a exactement un menteur. »

Qui sont les menteurs ?

Problème 14. Kurt Gödel, un super logicien qui ne se trompe jamais, est en visite sur une île, sur laquelle habitent deux types de personnes : les elfes, qui disent toujours la vérité, et les vampires, qui mentent toujours. Un collier a été volé, et on demande à Kurt de mener l'enquête.
- — Ada : « J'ai volé le collier. »
- — Benjamin : « Camille a volé le collier. »
- — Camille : « Ada a volé le collier. »

Ensuite, le logicien demande à Ada : « Est-ce que exactement l'un d'entre vous est un elfe ? », et obtient une réponse (oui ou non). Kurt est alors capable de démasquer le voleur. Qui est-ce ?

Remarque : bien que les elfes ne peuvent mentir, ils sont tout à fait capables de voler.