

Combinatoire

Exercices du cours

Exercice 1 Combien y a-t-il de nombres entiers pairs à deux chiffres ? (Un nombre à deux chiffres ne peut pas commencer par zéro).

Exercice 2 Combien y a-t-il de manières de choisir quatre entiers positifs différents, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, tous compris entre 1 et 500, tels que ces nombres soient les quatre premiers terme d'une suite géométrique de raison entière ? Autrement dit, tels que $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = q \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 Montrer de deux manières différentes la formule bien connue : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Exercice 4 Montrer de deux manières différentes que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

À vous de jouer**Problème 1. Un petit échauffement**

1. Dans un kiosque on peut acheter trois types d'enveloppes et 6 types de timbres. De combien de façons différentes peut-on acheter une enveloppe avec un timbre ?
2. Combien de nombres à 4 chiffres, dont au moins un chiffre est pair, existe-t-il ?
3. Dans l'alphabet de la langue du tribu Mumbo-Jumbo il y a 3 lettres. Un mot dans cette langue est toute suite d'au plus 4 lettres. Combien de mots y a-t-il ?

Problème 2. De combien de façons différentes peut-on placer une tour noire et une tour blanche pour que l'une ne puisse pas prendre l'autre ?

Problème 3. On jette un dé trois fois. Parmi toutes les suites que l'on puisse obtenir combien y en a-t-il de celles où l y a au moins un 6 ?

Problème 4. Combien y a-t-il de nombres à 9 chiffres dont la somme de chiffres est paire ?

Exercice 5 (Olympiades chinoises - 1994) On considère la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ consistant en l'ensemble des entiers naturels premiers avec 105, rangés dans l'ordre croissant. Calculer a_{1994} .

Exercice 6 Combien y a-t-il de nombres à cinq chiffres plus grands que 21300, tels que les chiffres de ces nombres sont tous différents et sont dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Exercice 7 Soient k et n deux entiers positifs. Combien y a-t-il de façons d'écrire n comme la somme de k entiers positifs ?

Exercice 8 On considère un polygone convexe à n sommets, tels que trois quelconques de ses diagonales ne sont pas concourantes. Combien existe-t-il de points où deux diagonales s'intersectent ?

Exercice 9 (Concours général - 1985) Soient p et q deux entiers positifs. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{2^{p+k}} \binom{p+k}{k} + \sum_{k=0}^p \frac{1}{2^{q+k}} \binom{q+k}{k} = 2.$$

Indication : on pourra dénombrer le nombre de sous-ensembles de $\{1, \dots, p+q+1\}$ possédants au moins $p+1$ éléments, en fonction de la position du plus grand élément.

Exercice 10 Deux dresseurs, A et B , possèdent chacun 6 Pokémon différents. Chacun ordonne ses Pokémon, puis ils se défient. Le premier Pokémon de A est envoyé contre le premier Pokémon de B . Puis, à chaque fois que l'un des Pokémon est battu, il est remplacé par le Pokémon suivant, dans l'ordre qu'a choisi à l'avance son dresseur. Lorsque l'un des dresseurs n'a plus de Pokémon, le combat se termine.

Combien peut-il y avoir de combats différents ?