Espace métrique

Exercice 1: Les applications suivantes $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissent-elles des distances sur $\mathbb{R}$? Si oui, dessiner les boules ouvertes $B(0, r)$ avec $r > 0$.

1. $d(x, y) = |x - y|$?
2. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$?
3. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$?
4. $d(x, y) = \sin(x - y)$?

Exercice 2: Soit X un ensemble non vide quelconque et d_0 l'application définie par

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

1. Montrer que d_0 définit une distance sur X.
2. Quelles sont les boules ouvertes et fermées pour cette distance ?

On l'appelle la distance discrète.

Exercice 3: L'application $d(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$ définie sur $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$ est-elle une distance sur $\mathbb{R}^\star$? Si oui dessiner la boule ouverte $B(1, 1)$ pour cette distance.

Exercice 4: Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

1. Montrer que l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} d' : A \times A & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$$

définit une distance sur A. On l'appelle la distance *induite* ou *provenant* de l'espace métrique (X, d).

2. On munit $[0, 1[\cup\{2\}$ de la distance induite par $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Représenter la boule ouverte (respectivement fermée) de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ puis de centre 2 et de rayon $\frac{1}{2}$.
3. Quelles sont les boules ouvertes et fermées dans $\mathbb{Z}$ pour la distance induite par $(\mathbb{R}, |.|)$?

Exercice 5: Distances sur l'ensemble des points du plan.
Montrer que chacune des applications suivantes d_∞, d_1 et d_2 sont des distances sur l'ensemble des points du plan, puis représenter dans le plan la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

1. $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $d_\infty\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \max(|x - x'|, |y - y'|)$.
2. $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $d_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = |x - x'| + |y - y'|$.
3. $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $d_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. On admettra que d_2 vérifie l'inégalité triangulaire. Montrer que d_2 vérifie tous les autres axiomes définissant une distance puis dessiner la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 6: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels deux à deux distincts.

1. On pose $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donnée par $d(n, m) = |u_n - u_m|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, décrire les boules ouvertes de centre 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 7 (*)**:** Soit X un ensemble et d une application vérifiant pour tout $x, y, z \in X$,

i) $d(x, y) \geq 0$,

ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iv) $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$.

1. Montrer que d est aussi une distance sur X, que l'on appelle distance ultramétrique.
2. Soient $x, y, z \in X$ tels que $d(x, y) \neq d(y, z)$, montrer que $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$.
   Que dire des triangles de sommets x, y et z avec cette distance ?