La bataille mathématique

Règles du jeu

C'est une compétition entre deux équipes. Les équipes reçoivent les mêmes problèmes une semaine à l'avance. Chaque équipe doit choisir un capitaine, qui participera au choix de l'ordre de passage et parlera au nom de l'équipe en général.

Après une semaine de travail sur les problèmes, la compétition a lieu au tableau devant un jury.

— L'ordre de passage est déterminé par une question de rapidité (p.ex. est-ce que 7999 est premier ?), posée aux capitaines. Celui qui repond le plus vite et correctement remporte. Si le plus rapide donne une mauvaise réponse, c'est l'autre équipe qui gagne.

— L'équipe qui remporte a le choix appeler l'autre équipe pour présenter une solution ou être appelée.

— L'équipe qui appelle choisit le problème que l'adversaire doit présenter. Deux cas de figure sont possibles :

  — L'équipe qui a été appelée a une solution à présenter. Dans ce cas elle envoie un membre de l'équipe au tableau pour présenter la solution. L'équipe qui a appelé envoit un opposant qui doit vérifier la solution présentée.

  — L'équipe n'a pas de solution à proposer. Dans ce cas c'est l'équipe qui appelle qui doit présenter la solution et l'équipe appelée envoit un opposant.

— Si l'opposant trouve une erreur que le jury trouve sérieuse, la présentation est interrompue et le présentateur a 1 minute pour corriger l'erreur. S'il n'y parvient pas, l'opposant peut présenter sa solution.

— En règle générale, les équipes appellent tour à tour. Si néanmoins une équipe a appelé un problème pour lequel aucune des équipes n'a de solution à présenter, alors cette équipe prend des points de pénalité, et c'est encore à cette équipe d'áppeler.

— Une fois la discussion autour d'un problème términée, le jury distribue 12 points entre les deux équipes. Si la solution présentée est correcte et l'opposant n'a rien à dire, tous les points vont à l'équipe qui a présenté. Sinon une partie de points va à l'opposant.

— Si à un moment une des équipes refuse d'appeler (p.ex. parce qu'elle n'a plus de problèmes resolus), l'autre équipe a le droit de présenter tous les problèmes restants (la premiere équipe envoit un opposant à chaque problème, bien entendu).

Problèmes

Problème 1. On appelle "crocodile" une figure qui se déplace sur un damier infini en se déplaçant d'une case dans une direction puis de n cases dans une direction perpendiculaire (pour $n = 2$ c'est le cavalier classique). Pour quelles valeurs de n le crocodile peut-il aller de n'importe quelle case du damier infini à n'importe quelle autre case ?

Problème 2. Soit p un nombre premier. On suppose que $2^p + p^2$ est aussi premier. Trouver p.

Problème 3. Est-ce que le cube d'un nombre entier peut se terminer par 2017 chiffres 1 ?

Problème 4. Montrer que parmi les diagonales de n'importe quel pentagone convexe on peut choisir 3 d'entre elles qui s'intersectent selon un triangle à l'intérieur du pentagone.

Problème 5. Des nombres entiers sont placés dans un tableau à n lignes et $n + 1$ colonnes. Montrer que l'on peut barrer un certain nombre de colonnes de ce tableau (sans les barrer toutes) de sorte que les sommes de nombres dans chaque ligne du nouveau tableau soient paires.

Problème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère qui n'est pas un trapèze. Soit P le point d'intersection de (AB) et (CD) et Q le point d'intersection de (AD) et (BC). Montrer que les cercles circonscrits des triangles ADP, DCQ, BCP et ABQ ont un point commun.

Problème 7. On dit qu'un point A est **presque le centre de symétrie** d'un ensemble E du plan si on peut enlever un point de E de sorte que A devienne le centre de symétrie de l'ensemble obtenu (E doit contenir au moins 2 points distincts). Combien de presque centres de symétrie peut avoir un ensemble fini de points du plan ?

Problème 8. On a placé 30 nombres sur un cercle de sorte que chaque nombre soit égal à la valeur absolue de la différence des deux nombres suivants dans le sens des aiguilles d'une montre. La somme de ces nombres est 1. Trouver ces nombres et leur disposition.