$\boxed{\textbf{Séance du 7 février 2011}}$

Quelques fonctions en arithmétique

Fonction$[x]$.

La fonction "partie entère" $[x] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est définie par la règle suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x

Théorème 1. *Soient p un nombre premier et n un entier naturel. Alors l'exposant de p dans la décomposition canonique de $n!$ est égal à*

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

Démonstration

Tout d'abord on remarque que la somme est finie : pour tout k tel que $p^k\ n$ $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$.

Le nombre de facteurs, divisibles par p dans $n!$ est $\left[\frac{n}{p}\right]$, facteurs divisibles par p^2 est $\left[\frac{n}{p}\right]$ etc. La somme de ces nombres donnt l'exposant recherché, car chaque terme dans le produit $n!$ qui est un multiple de p^k mais pas un multiple de p^{k+1} est compté exactement k fois : comme étant divisiple par p, p^2,…,p^k. □

Fonctions multiplicatives

Définition 1. *Une fonction $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée multiplicative si*

1. *Il existe un n tel que $\theta(n) \neq 0$.*
2. *Quel que soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux, $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.*

Exemple : Toute fonction de type $\theta(a) = a^s$, avec s réel ou complexe, est multiplicative

Propriétés :

1. Si θ est une fonction multiplicative, alors $\theta(1) = 1$.
2. Si θ_1 et θ_2 sont deux fonctions multiplicatives, alors la fonction produit $\theta_1\theta_2$ est multiplicative.

Démonstration À faire ! □

Théorème 2. *Soit $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction multiplicative et soit $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition canonique de a en facteurs premiers. Alors, si l'on note $\sum_{d|a}$ la somme sur tous les diviseurs de a, on obtient*

$$\sum_{d|a} \theta(d) = (1 + \theta(p_1) + \theta(p_1^2) + \dots + \theta(p_1^{\alpha_1}))\dots(1 + \theta(p_k) + \theta(p_k^2) + \dots + \theta(p_k^{\alpha_k})).$$

Cette formule génerale donne deux deux résultats particuliers interessants :

Si $\theta(a) = a^s,\ s \in \mathbb{C}$ alors on a

$$\sum_{d|a} d^s = (1 + p_1^s + p_1^{2s} + \dots + p_1^{\alpha_1 s}))\dots(1 + p_k^s + p_k^{2s} + \dots + p_k^{\alpha_k s})).$$

En particulier

1. Si $s = 1$, alors cette formule nous permet de calculer la somme $S(a)$ de tous les diviseurs de a :
$$S(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$
2. Si $s = 0$ cette même formule permet de calculer le nombre $\tau(a)$ de diviseurs de a :
$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1).$$

Exercices :

Exercice 1 Démontrer les deux dernières formules

Exercice 2 Soient Q et R deux réels, $Q < R$, et f une fonction continue et positive sur l'intervalle fermé $[Q, R]$. Montrez que la somme sur tous les entiers x dans cet intervalle

$$\sum_{Q \leq x \leq R} [f(x)]$$

donne le nombre de points dont les coordonnées sont des nombres entiers dans le domaine défini par les inégalités $Q \leq x \leq R$ et $0 < y \leq f(x)$.

Exercice 3 Soient $n > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $M > 1$ et $x \in \mathbb{N}$ tel que x n'a pas de diviseurs qui seraient une puissance m-ième d'un entrier différent de 1. Montrez que

$$\sum_{x} \left[\sqrt[m]{\frac{n}{x}} \right] = [n].$$

Exercice 4 Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que les familles $([\alpha x])_{x \in \mathbb{N}}$ et $([\beta y])_{y \in \mathbb{N}}$ n'ont pas d'éléments communs et leur réunion recouvre tous les entiers positifs. Montrez que ce n'est possible que si (et seulement si !) α est irrationnel et

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Exercice 5 Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ et soit $n = a_1 + \cdots + a_k$. En utilisant le théorème 1, montrez que

$$\frac{n!}{a_1! \ldots a_k!} \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 6 Soit θ une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$. Montrez que θ est multiplicative si et seulement si la fonction ψ définie par

$$\psi(a) = \sum_{d|a} \theta(a)$$

est multiplicative.