Série 7 : Pour les vacances

Voici, pour commencer, quelques problèmes qui ont été donnés avant, mais qui n'ont pas été résolus.

Problème 1

1) Étant donné une droite l, un point A sur l et un point B hors de l construire à la règle et au compas un cercle tangent à l et passant par A et B. Est-ce que la solution est unique ?
2) Même question si A et B sont du même côté de l.

Problème 2 Les nombres de 1 à $2n$ sont répartis en deux ensembles $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ tels que $a_1 < a_2 \dots < a_n$ et $b_1 > b_2 \dots > b_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$.

Problème 3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \{1, \dots, 2n\}$ deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$ tels que $i \neq j$ et a_i divise a_j.

Problème 4 Démontrez la formule du binome de Newton : pour tout entier naturel n,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1}b^n.$$

Et maintenant voici des nouveaux exercices pour les vacances.

Problème 5 Montrer qu'un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux deniers chiffres est divisible par 4.

Problème 6 Parmi les nombres entiers de 1 à 200 combien sont divisibles par exactement un de trois nombres 4, 6 et 7 ?

Problème 7 Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel (c.a.d. ne peut pas s'écrire comme $\frac{a}{b}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$).

Problème 8 Montrer que si dans un triangle deux hauteurs sont de même longueur, alors le triangle est isocèle. Est-ce que le même énoncé est vrai si deux médianes sont de même longueur ? Deux bissectrices ?

Problème 9 Deux sentinelles patrouillent une tour ronde à vitesse constante. La vitesse du premier soldat est deux fois supérieure à celle du deuxième. Dans le mur de la tour il y a quelques meurtrières et sa longueur est 1. On dit que le système de ces meurtrières est fiable si à tout moment ou moins une de deux sentinelles est devant une mertrière.

1. Quelle doit être la longueur minimale d'une meurtrière pour qu'elle constitue un système fiable à elle seule ?
2. Montrer que la longueur totale de toutes les meurtrières d'un système fiable est supérieure à 1/2.
3. Montrer que pour tout $s > 1/2$ il existe un système fiable dont la longueur totale de meutrière est inférieure à s.

Problème 10 Un surfeur trop téméraire se laisse prendre par les vagues et échoue sur une île en forme de triangle équilatéral. Ce lieu lui semble un endroit rêvé et il décide de s'y installer. Il souhaite donc construire une cabane où la somme des distances aux côtes est la plus faible possible car il passe beaucoup de temps à surfer sur chacune des trois plages.

Pouvez-vous l'aider à trouver l'emplacement idéal ?

Problème 11

1. Existe-t-il des nombres entiers a et b tels que $7a^2 - 3b^3 = 6$?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'expression $n^2 + 20n + 11$ n'est jamais un carré parfait.

Problème 12 On appelle A l'ensemble des entiers naturels de la forme $a^2 + 3b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et B l'ensemble des entiers relatifs de la forme $a^2 + ab + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $A = B$, c'est à dire que tout élément de A est dans B et inversement.
2. Montrer que 4 divise tout élément pair de A et que le quotient de ces deux nombres est encore dans A.
3. Montrer que tout élément non nul de A est le produit d'un élément impair de A par une puissance de 4.