Série 4 : Un peu de tout

Problème 1 Deux personnes jouent au jeu suivant. Ils disposent d'une table ronde et d'autant de jetons ronds identique qu'ils veulent. A tour de rôles ils posent un jeton chacun de sorte qu'ils ne se chevauchent pas. Celui, qui ne peut plus poser son jeton, perd. Est-ce qu'un de joueurs a une stratégie gagnante (c.a.d. une stratégie qui lui permet de gagner, independement de ce que fait l'autre) ?

Problème 2 On a trois boîtes noires. La première, prend un couple d'entiers (a, b) et retourne deux couples (a, b) et $(a+1, b+1)$. La deuxième prend un couple d'entiers pairs (a, b) et retourne deux couples (a, b) et $(a/2, b/2)$. La troisième prend deux couples d'entiers (a, b) et (b, c) et retourne trois couples (a, b), (b, c) et (a, c). Est-ce qu'on peut obtenir le couple $(10, 2012)$ en partant du couple $(3, 18)$?

Problème 3 On dispose de 6 boîtes numérotées et de 20 boules indistinguables. Combien de façons a-t-on de placer ces boules dans ces boîtes (on peut avoir des boîtes vides) ?

Problème 4 On a trois boîtes. Dans une il y a deux boules blanches, dans la deuxième deux boules noires et dans la troisième il y a une boule noire et une boule blanche. Sur les couvercles de ces boîtes on a marque BB, NN et BN, mais aucune inscription ne correspond au contenu de la boîte. Comment peut-on déterminer quel boite contient quelles boules en sortant une seule boule d'une seule boite ?

Problème 5 Comment découper un triangle quelconque en trois parties qui peuvent etre rearangées pour former un rectangle ?

Problème 6 Le nombres de 1 à $2n$ sont répartis en deux ensembles $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ tels que $a_1 < a_2 \ldots < a_n$ et $b_1 > b_2 \ldots > b_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$.

Problème 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, 2n\}$ deux à deux distincts. Montrez qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ tels que $i \neq j$ et a_i divise a_j.

Problème 8 Montrez que le nombre de n-uplets constitués de 0 et de 1, contenant exactement m fois la sequence 01, est $\binom{2m+1}{n+1}$.