Série 3 : logique, ensembles et applications

Problème 2 Écrire la réciproque puis la contraposée des implications suivantes :

1. Si $2 \times 2 = 5$ alors les sorcières existent.
2. S'il fait beau et si je ne suis pas trop fatigué(e), alors j'irai me promener.
3. Si je gagne au loto, alors je m'achète une voiture et je vais à la mer.

Problème 3 Formaliser :

1. Personne n'est parfait (en utilisant p(x) signifiant "x est parfait").
2. 0 est multiple de chaque nombre entier (en utilisant $m(x, y)$ signifiant "x est multiple de y").

Problème 4 Soit A, B et C trois ensembles. Démontrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
3. $A \subset b \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$
4. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Problème 5 Soit $E = \{a; b\}$. Expliciter $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Problème 6 Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

On appelle **application** la donnée de deux ensembles A et B et f'une règle f par laquelle a chaque élément a de A on associe un unique élément $f(a)$ de B. On note $f : A \longrightarrow B$.

Si pour chaque élément b de B il existe un élément a de A tel que $b = f(a)$, alors on dit que f est **surjective**. Si aucuns deux élements de A ne sont associés a un même élément de B, alors on dit que f est **injective**. Si f est à la fois injective et surjective, alors on dit que f est **bijective**.

Problème 7 Soit Γ un cercle dans un plan cartésien, centré dans le point d'origine et de rayon R.

1. On définit $f : [-R; R] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $a \in [-R; R]$ $f(a)$ l'ordonnée de l'intersection de la droite d'équation $x = a$ avec Γ. Est-ce une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ou bijective ? Si non, que peut-on modifier pour obtenir une application ?
2. On définit $f : [-R; R] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $a \in [-R; R]$ $f(a)$ l'ordonnée de l'intersection de la droite d'équation $y = x - 2a$ avec Γ. Est-ce une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ou bijective ? Si non, que peut-on modifier pour obtenir une application ?
3. On définit $f : [-R; R] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $a \in [-R; R]$ $f(a)$ la longueur de l'intersection de la droite d'équation $x = a$ avec le disc délimité par Γ. Est-ce une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ou bijective ? Si non, que peut-on modifier pour obtenir une application ?

Problème 8 Montrer que ($f : A \longrightarrow B$ est bijective) $\Longrightarrow$ ($\exists g : B \longrightarrow A$ telle que $\forall a \in A, g(f(a)) = a$). La réciproque est-elle vraie ?