

Séance 2 : logique

Problème 1 Soit a, b, c des réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $a \leq -2$ ou $a \geq 3$;
2. $a \leq 5$ et $a > -1$;
3. $a \leq 5$ ou $3 > c$.

Problème 2 Énoncer la négation des assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
3. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.

Problème 3 Soit P, Q, R des propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ?

1. $(P \text{ et } Q)$; $(\neg P \text{ et } \neg Q)$;
2. $(P \Leftrightarrow Q)$; $(\neg Q \Leftrightarrow \neg P)$;
3. $(P \text{ ou } Q)$; $(P \text{ et } Q)$.

Problème 4 Quatre fiches sont placées sur une table. Sur chaque fiche sont écrits une lettre (sur une face) et un chiffre (sur l'autre face). On peut lire sur deux de ces fiches les lettres A et B et sur deux autres les nombres 4 et 5. Combien de fiches faut-il retourner au minimum pour vérifier si l'énoncé suivant : "S'il y a un nombre pair sur un côté d'une de ces quatre fiches, alors il y a une voyelle sur l'autre côté de cette fiche" est vrai ou faux ?

Problème 5 Sur l'île de menteurs et des honnêtes les habitants A_1, A_2, \dots, A_n se rencontrent. L'habitant A_1 dit : " A_2 est un menteur", l'habitant A_2 dit : " A_2 est un menteur", ..., l'habitant A_n dit : " A_1 est un menteur". Montrez que n est pair.

Problème 6 André, Boris, Cyril, Damien et Étienne sont dans la même classe. Combien de propositions au maximum peuvent être vraies parmi les propositions suivantes :

- a) André est un ami de Cyril et Damien est un ami d'Étienne.
 - b) Cyril a exactement deux amis et un des amis de Cyril est un ami de Boris.
 - c) André et Boris ne sont pas amis.
 - d) Boris n'a pas d'ami et Étienne est un ami d'André
 - e) Cyril est un ami de Boris et Étienne n'a qu'un seul ami.
- (Ici on suppose que l'amitié est toujours partagée : si X est l'ami de Y, alors Y est l'ami de X.)

Problème 7 Basile a écrit un chiffre sur une feuille de papier. Sami, qui ne voit pas ce chiffre, demande à Basile (qui ne ment jamais) : "Est-il vrai que le chiffre écrit est strictement inférieur à 8 ou divisible par 3 ?" Basile répond négativement. Quel chiffre a-t-il écrit ?

Problème 8 Myriam et Sophie font leur devoir maison de logique. Myriam prépare la table de vérité de l'opération qui a deux propositions A et B quelconques associe la proposition $\overline{A} \text{ et } \overline{B}$ et Sophie prépare la table de vérité de l'opération qui a deux propositions A et B quelconques associe la proposition $\overline{A} \text{ ou } \overline{B}$. Montrez que, si elles ne se trompent pas, elles obtiennent la même table.

Et si elles avaient à écrire les tables de $\overline{A} \text{ et } \overline{B}$ et $\overline{A \text{ et } B}$?