Séance du 22 septembre 2010

Problème 1 Un verre contient des bactéries. Toutes les secondes, chaque bactérie se divise en deux nouvelles bactéries. Au bout d'une minute le verre est plein. À quel moment etait-il à moitié plein ?

Problème 2 Un escargot grimpe le long d'un poteau vertical de sept mètres et demi de hauteur, en commencant tout en bas. Chaque jour il gravit cinquante centimètres et chaque nuit il redescend de quarante centimètres. Quand parviendra-t-il au sommet du poteau ?

Problème 3 Un boulanger a acheté un sac de 24 kg de farine. Il voudrait en sortir 9 kg, mais dispose d'une balance simple seulement (sans aiguille). Comment faire ?

Problème 4 Pierre a devant lui deux verres pleins de même taille, l'un de lait, l'autre de thé. Il prend trois cuillerées de lait, les verse dans le verre de thé, remue bien, puis reverse trois cuillerées de ce mélange dans le verre de lait. Y a-t-il maintenant plus de thé dans le verre (initialement) de lait ou de lait dans le verre (initialement) de thé ?

Problème 5 Composez un carré magique (les sommes de nombres de chaque colonne, de chaque ligne et de chaque diagonale respectivement sont les mêmes) de format 3×3 à l'aide des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Problème 6 Montrez que si un polygone à 45 côtés possède un axe de symétrie, cet axe passe par l'un au moins des sommets du polygone.

Problème 7 Une sauterelle peut-elle, dans chacun des cas suivants, revenir à son point de départ en vingt-cinq sauts exactement si elle effectue :

1. sur une droite (graduée), des sauts de longueur impaire dans le sens qu'elle veut ?
2. dans un plan (quadrillé et orienté), des sauts de longueur 1 vers le haut, vers le bas, vers la droite ou vers la gauche ?
3. dans un plan (quadrillé), des sauts en diagonale comme un "chevalier", selon les diagonales de rectangles de format 2×3 ?
4. dans un plan (quadrillé), des sauts en diagonale selon les diagonales de rectangles de format $a \times b$, où les nombres entiers a et b sont fixés ?

Problème 8 On place huit tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune ne puisse en prendre une autre. Montrez que le nombre de tours placées sur les cases noires est pair.

Problème 9 Un tableau de format 3×3 est rempli de zéros. On peut ajouter 1 à chaque case d'un carré 2×2 à la fois. Peut-on en itérant le procédé obtenir le tableau suivant :

4	9	5
10	18	12
6	13	7

?

Problème 10 On écrit au tableau trois nombres entiers. On peut en choisir deux quelconques (notons les a et b) et les remplacer par $\dfrac{3a-b}{2}$ et $\dfrac{3b-a}{2}$ respectivement. Si l'on part des nombres 2007, 2008 et 2010, peut-on en itérant le procédé obtenir les nombres 2000, 2005 et 2011 ?