Séance du 19 septembre 2012

Problème 1 On dispose de deux mèches dont on sait uniquement que chacune d'elles brûle en une heure exactement (elles ne sont pas forcement de même longueur ni de même épaisseur sur toute la longueur). Comment, en n'utilisant que ces deux mèches et un briquet, mesurer 45 minutes exactement ?

Problème 2 Existe-t-il une ligne fermée brisée, composée de 11 segments, telle que chaque segment coupe exactement un autre ?

Problème 3 Pierre a un verre de lait et un verre de thé. Il prend trois cuillères de lait, les verse dans le verre de thé, mélange bien, puis reverse trois cuillères de mélange dans le verre de lait. Est-ce qu'il y a maintenant plus de thé dans le verre de lait ou de lait dans le verre de thé ?

Problème 4 Dans une salle de cours, qui a la forme d'un hexagone régulier de côté 5m, on a placé 6 ronfléomètres, un dans chaque coin. Chaque ronfléomètre indique le nombre d'étudiants qui se trouvent à moins de 5 mètres du ronfléomètre et qui dorment en cours. Combien d'étudiants dorment, si la somme de nombres affichés par les 6 ronfléomètres est 7.

Problème 5 On a un tas de 25 cailloux. On le divise en deux et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. A l'étape suivante, on divise en deux un des tas obtenus (on obtient donc trois tas) et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. On continue ainsi : à chaque étape, on divise en deux un des tas existants, et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. L'opération se termine jusqu'à obtenir 25 tas de 1 caillou chacun. Quelles sont les valeurs que peut prendre la somme de tous les nombres notés ?

Problème 6 Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume quelques lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumières qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-on choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'éteigne jamais complétement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

Problème 7 Montrez que la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ prend des valeurs entières pour tout x entier si et seulement si $2a$, $a + b$ et c sont des entiers.

Problème 8

1) Étant donné une droite l, un point A sur l et un point B hors de l construire à la règle et au compas un cercle tangent à l et passant par A et B. Est-ce que la solution est unique ?

2)* Même question si A et B sont du même côté de l.