Séance du 15 décembre 2010

Divisibilité

Problème 1 Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs, et soit n un nombre entier strictement positif tel que a et n soient premiers entre eux. Montrez que

$$PGCD(a, nb) = PGCD(a, b).$$

Problème 2 Soient a et b deux nombres entiers, non nuls au même temps. Soit $d = ax_0 + by_0$ le plus petit entier naturel qui peut être écrit sous forme $ax + by$, avec x et y entiers.

1. Montrez que $d = PGCD(a, b)$;
2. Montrez que l'ensemble des diviseurs premiers communs à a et b coïncide avec l'ensemble des diviseurs premiers de d ;
3. Montrez que $PGCD(am, bm) = PGCD(a, b)m$ pour tout nombre entier positif m.

Problème 3 Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs, et soit n un nombre entier strictement positif tel que a et n soient premiers entre eux. Montrez que

$$PGCD(a, nb) = PGCD(a, b).$$

Problème 4 Amélie a une feuille de papier quadrillé de $m \times n$ carreaux. Combien de noeuds du quadrillage une diagonale de la feuille d'Amélie contient-elle ?

Problème 5 Soit n un entier strictement positif. Trouvez le $PGCD$ des nombres
a. $2n + 13$ et $n + 7$;
b. $n^2 + 3n + 3$ et $n + 2$.

Problème 6 Béatrice a une paire de ciseaux et deux gabarits d'angle en carton de m° et n°, respectivement, où m et n sont des nombres entiers strictement positifs et premiers entre eux. Comment peut-elle, en n'utilisant que ces gabarits-là, découper un angle de 1° ?

Problème 7 Trouvez le $PGCD$ de $2^{2010} - 1$ et $2^{1995} - 1$.

Problème 8 Resoudre l'équation suivante en nombres entiers strictement positifs

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Problème 9 Un ordinateur a calculé la somme des chiffres dans l'écriture décimale de 19^{2011}. Ensuite il a calculé la somme des chiffres du nombre obtenu et a répété cette opération jusqu'au moment où le nombre obtenu soit à un chiffre. Quel est ce chiffre ?

Problème 10 Quarante quatre arbres sont plantés le long d'un cercle. Sur chacun de ces arbres, il y a au départ exactement un moineau. De temps en temps deux moineaux changent simultanémént leur positions : un moineau se déplace sur l'arbre voisin dans le sent des aiguilles d'une montre, l'autre moineau se déplace sur l'arbre voisin dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les moineaux peuvent-ils se retrouver tous sur un même arbre ?

Problème 11 Louise a décidé de créer un nouveau langage. Comme premiers mots du langage elle a pris les 26 lettres de l'alphabet. Ensuite, elle a décidé d'enrichir le langage et a ajouté au langage toutes les combinaisons des deux lettres de l'alphabet. Puis elle a ajouté toutes les combinaisons de trois lettres et ainsi ce suite. Montrez que, à aucune étape d'enrichissement (à l'étape n elle ajoute toutes les combinaisonts de $n + 1$ lettres), le nombre des mots dans le langage de Louise n'est le carré d'un nombre entier.