

Rappel des exercices précédents

Problème 1 Est-ce qu'une sauterelle peut retourner au point de départ après 25 sauts exactement si elle saute :

1. Sur une droite, à une distance impaire, en direction qu'elle veut ?
2. Sur un plan, en haut, en bas, à droit ou à gauche, à une distance de 1 ?
3. Sur un plan, comme un chevalier (c.à.d. en diagonale d'un rectangle 2×3) ?
4. Sur un plan, en diagonale d'un rectangle $a \times b$, où les nombres a et b sont fixés ?

Problème 2 On écrit au tableau trois nombres entiers. On peut prendre n'importe quels deux d'entre eux (notons les a et b) et les remplacer par $\frac{3a-b}{2}$ et $\frac{3b-a}{2}$. Si l'on commence avec les nombres 2007, 2008 et 2010, peut-on obtenir les nombres 2000, 2005 et 2011 ?

Problème 3 On place 8 tours sur un échiquier de telle sorte qu'aucune ne puisse prendre aucune autre. Montrez que le nombre de tours placées sur les cases noires est pair.

Nouveau

Problème 4 On a partagé un disque en six secteurs identiques qu'on a numérotés de 1 à 6 dans le sens des aiguilles d'une montre. Ensuite on a placé un haricot dans les secteurs 1 et 3.

On s'autorise à choisir deux secteurs voisins et à ajouter un haricot dans chacun de des deux secteurs choisis. Peut-on, en utilisant cette opération plusieurs fois, obtenir le même nombre de haricots dans chacun des six secteurs ?

Problème 5 Une caravane, constituée au départ d'un chameau et d'un dromadaire, entame un long périple. Le chameau est en tête et le dromadaire suit. Chaque fois que cette caravane traverse un village l'un des deux événements suivants se produit :

- Deux chameaux ou deux dromadaires, marchant exactement l'un derrière l'autre, rejoignent la caravane, en tête, en queue ou alors dans la file, mais, dans tous les cas, sans qu'aucun autre animal ne s'intercale entre eux ;
- deux chameaux ou deux dromadaires voisins dans la caravane s'arrêtent définitivement dans le village.

Se peut-il, qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, la caravane se réduise à un chameau et un dromadaire, le dromadaire étant cette fois en tête ?

Problème 6 Pierre se prépare à visiter Tramville. Son guide touristique souligne que la ville comporte un certain nombre de places reliées par les lignes de tramway à sens unique. Il mentionne en plus qu'exactement deux lignes à sens unique arrivent sur chaque place et que trois en repartent. Montrez que l'information du guide est incorrecte.

Problème 7 Démontrez deux propriétés suivantes :

1. La somme des puissances entrantes des sommets d'un graphe orienté est égale au nombre d'arêtes
2. La somme des puissances entrantes des sommets d'un graphe orienté est égale à la somme des puissances sortantes des sommets de ce graphe.

Problème 8 Pour construire un réseau routier Cedric et Mélanie ont disposé des stations-service et ont tracé des routes reliant entre elles certaines de ces stations. Ils veulent imposer une direction de circulation sur chaque route du réseau de telle façon qu'une voiture partant d'une station ne puisse y revenir. Un tel projet est-il réalisable ?