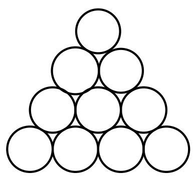
Marathon.

Problème 1

Soit 6 pièces de monnaie, dont 2 fausses (plus légères que les vraies). Trouvez les deux pièces en trois pesées sur une balance simple.

Problème 2

Dix pièces de vingt centimes sont placées comme indiqué ci-contre. On veut en ôter quelques-unes de façon que les pieces restantes ne soient pas de sommets d'un triangle équilatéral. Quel est le nombre minimal de pièces à ôter ?



Problème 3

Soient a et b deux entiers positifs tels que

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1}+\frac{a^2+a+2}{b^2+b+2}+\frac{a^2+a+3}{b^2+b+3}+\dots\frac{a^2+a+2013}{b^2+b+2013}=2013$$

Montrer qu'alors $a=b$.

Problème 4

Soit $P(x)=5x^4-30x^3-75x^2-35x+2$, calculer $P(8)$.

Problème 5

De combien de façons peut-on écrire 2013 comme somme d'entiers consécutifs ?

Problème 6

On inscrit sur un cercle les chiffres 1, 2, 3. Puis on itère le procédé suivant : à chaque étape, entre deux nombres existants qui se suivent sur le cercle, on inscrit leur somme (comme indiqué ci-contre). Quelle sera la somme de tous les nombres inscrits sur le cercle à l'issue de la dixième étape (en considérant comme première étape le placement de 1, 2, 3) ?

Problème 7

Montrez que on ne peut pas paver un carré 10×10 par des T-tetraminos.

Problème 8

Résoudre l'équation

$$x-1=\left\{n\sqrt{2013}+\frac{n}{2}\right\}-\left\{n\sqrt{2013}\right\}$$

où $n\in\mathbb{N}$ et $\{x\}$ est la partie fractionnaire du réel x, c'est-à-dire : $\{x\}=x-\int x$ (et $\int x$ est la partie entière de x i.e. le plus petit entier inférieur à x).

Problème 9 Une guirlande lumineuse comporte n petites lumières. Quand on l'allume quelqeus lumières s'allument tout de suite (les mêmes à chaque fois) et les autres non. Ensuite la guirlande se comporte comme suit : au bout de chaque minute toutes les lumieres qui étaient allumées s'éteignent et celles qui étaient éteintes mais avaient exactement une "voisine" allumée s'allument. Pour quelles valeurs de n peut-in choisir les lumières qui s'allument au départ de sorte que la guirlande ne s'eteigne jamais compl'etement (tant qu'on ne coupe pas le courant, bien évidemment) ?

Problème 10 Sur une feuille quadrillée, on a tracé un polygone tel que tous ses sommets se trouvent sur les noeuds du quadrillage et aucun de ses côtés ne suit les lignes du quadrillage. Montrez que la somme des longueurs de tous les segments verticaux du quadrillage à l'intérieur du polygone est égale à la somme des longueurs de tous les segments horizontaux.

Problème 11 Tous les nombres à 5 chiffres qui s'écrivent uniquement avec les chiffres 1, 2, 3, 4, et 5 sans répétition ont été numérotés dans l'ordre croissant. Quel est le numéro du nombre 43521 ?