

## Éléments de logique et des ensembles

Voici quelques premiers éléments sur la logique et les ensembles. Il ne s'agit pas véritablement de la théorie de logique et des ensembles, mais plutôt des notations et quelques faits élémentaires qui permettent surtout de préciser certaines façons d'écrire les mathématiques.

## Ensembles

Une collection d'objets distincts est appelée **ensemble** si l'on peut savoir si tel ou tel objet bien déterminé est dans cette collection ou pas. On dit alors que chaque objet de cette collection est **un élément** de cette ensemble.

**Exemples** L'ensemble des êtres humains, l'ensemble de tasses jaunes, l'ensemble de nombres entiers....

La collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble (on postule qu'un ensemble n'est pas un élément de lui même).

Pour dire que  $x$  appartient à l'ensemble  $X$  (c.a.d. que  $x$  est un élément de  $X$ ) on écrit  $x \in X$ . Sinon on dit " $x$  n'appartient pas à  $X$ " et on écrit  $x \notin X$ .

**Notations des éléments d'un ensemble.** On peut citer entre les accolades les éléments de l'ensemble (l'ordre n'a pas d'importance). Par exemple on écrit  $E = \{-1, 1, 2, 3\}$  pour dire que l'ensemble  $E$  est constitué de 4 éléments  $-1, 2, 3, 1$ . On peut aussi écrire  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 3, x \neq 0\}$ , ou encore  $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^4 + 2x = 7\}$ .

On appelle l'ensemble n'ayant qu'un seul élément **singleton**.

On admet l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément. Il s'appelle ensemble vide et il est noté  $\emptyset$ .

## Notions de logique.

**Une proposition** en logique un énoncé dont on peut parler de vérité et dont la vérité peut être établie sans ambiguïté.

**Exemples :** " $2 \times 3$ " n'est pas une proposition car on ne peut pas parler de vérité du tout dans ce cas. " $5$  est le carré d'un nombre entier" est une proposition fausse, " $2 < 3$ " est une proposition vraie. La vérité de " $2x = 5$ " dépend de la valeur de  $x$ , la proposition " $x$  est un réel négatif et  $2x = 5$ " est fausse mais " $x = 2, 5$  et  $2x = 5$ " est vraie (une telle construction s'appelle prédicat).

Lorsqu'une proposition dépend d'une variable  $x$  qui prend ses valeurs dans l'ensemble  $E$  on la note  $p(x)$ ,  $x \in E$ .

A chaque proposition on peut affecter sa valeur de vérité V pour vrai, F pour faux. On appelle **table de vérité**

de la proposition  $p$  le tableau suivant

P
V
F

## Opérations logiques.

Plusieurs opérations (ou connecteurs) logiques servent à former de nouvelles propositions à partir de propositions données.

Si  $p$  est une proposition, sa **négation** "non  $p$ ," notée aussi  $\neg p$  ou  $\bar{p}$ , est la proposition qui est fausse si  $p$  est vraie et vraie si  $p$  est fausse. Sa table de vérité est

$p$	non $p$
V	F
F	V

On appelle la **disjonction (inclusive)** de deux propositions  $p$  et  $q$  la proposition “ $p$  ou  $q$ ”, (autrement appelée “**ou logique**”) notée aussi  $p \vee q$ , vraie si et seulement si l’une au moins de ces propositions est vraie. Sa table de vérité est donc

$p$	$q$	$p$ ou $q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**Remarque 1.** Dans la langue usuelle le “ou” est souvent exclusif, synonyme de “soit l’un, soit l’autre” (Par exemple “Voulez-vous du thé ou du café?”). En mathématique l’usage est différent : “ou” désigne toujours la disjonction inclusive. L’autre disjonction (appelée exclusive) est peu utilisée en mathématique.

**Exemples :** “ $2 < 3$  ou 5 est le carré d’un entier” est vraie, “ $2 < 3$  ou 4 est le carré d’un entier” est vraie, “ $2 > 3$  ou 5 est un carré” est fausse.

On appelle la **conjonction** de deux propositions  $p$  et  $q$  la proposition “ $p$  et  $q$ ”, (autrement appelée “**et logique**”) notée aussi  $p \wedge q$ , vraie si et seulement si les deux propositions sont vraies. Sa table de vérité est donc

$p$	$q$	$p$ et $q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**Exemples :** “ $2 < 3$  et 5 est le carré d’un entier” est fausse, “ $2 < 3$  et 4 est le carré d’un entier” est vraie.

On appelle l’**implication logique** de la proposition  $q$  par  $p$  et on note “ $p \Rightarrow q$ ” la proposition “non  $p$  ou  $q$ ”. Sa table de vérité est donc

$p$	$q$	non $p$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

L’implication logique  $p \Rightarrow q$  est vraie si  $p$  est fausse, quelle que soit la valeur de  $q$ . La proposition “ $2 \times 2 = 5 \Rightarrow$  les sorcières existent” est vraie (que l’on admette l’existence ou la non existence de sorcières).

L’implication logique  $p \Rightarrow q$  est toujours vraie si  $q$  est vraie, que la proposition  $p$  soit vraie ou pas : l’implication logique “les sorcières existent  $\Rightarrow 2 \times 2 = 4$ ” est vraie. L’implication logique **ne représente donc pas forcément le lien de cause à effet.**

L’implication “ $p \Rightarrow q$ ” se lit “ $p$  implique (ou entraîne)  $q$ ” ou “si  $p$  alors  $q$ ”. La proposition  $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  s’énonce “le carré de tout réel  $x$  est positif ou nul”, mais on peut remarque que la construction “si ... alors” y est cachée : “si  $x$  est un réel alors  $x^2 \geq 0$ ”.

Soit  $p \Rightarrow q$  une implication. L’implication  $q \Rightarrow p$  s’appelle la **réciproque** de  $p \Rightarrow q$ , et l’application  $\neg q \Rightarrow \neg p$  s’appelle la **contraposée** de  $p \Rightarrow q$ .

**Exemple :** Le théorème de Pythagore dit “si le triangle est rectangle alors le carré de l’hypothénuse est égal à la somme de carrés de deux autres côtés”. C’est une implication (vraie) “triangle est rectangle  $\Rightarrow$  le carré de l’hypothénuse est égal à la somme de carrés de deux autres côtés”. Sa réciproque est “si le carré du plus grand

côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle” (remarquez qu’on ne peut pas parler d’hypothénuse tant qu’on ne sait pas que le triangle est rectangle), et sa contraposée est “si le carré du plus grand côté n’est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n’est pas rectangle”.

Si l’on sait qu’une implication  $p \Rightarrow q$  est vraie, alors pour que  $q$  soit vraie il suffit que  $p$  soit vraie (si  $p$  est fausse on ne peut rien dire de  $q$ , car l’implication sera vraie de toute manière), et pour que  $p$  soit vraie il est nécessaire que  $q$  soit vraie (si  $q$  est fausse, l’implication n’est vraie que si  $p$  est fausse). On dit alors que  $p$  est **la condition suffisante pour  $q$**  et que  $q$  est **la condition nécessaire pour  $p$** .

$p$  et  $q$  étant deux propositions logiques, on note  $p \Leftrightarrow q$ , la proposition “( $p \Rightarrow q$ ) et ( $q \Rightarrow p$ )”. Sa table de vérité se déduit donc de celles de l’implication et de la conjonction :

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On remarque que  $p \Leftrightarrow q$  est vraie si et seulement si  $p$  et  $q$  sont soit toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. On dit alors que  $p$  est une **condition nécessaire et suffisante** pour  $q$ , ou encore que  $p$  et  $q$  sont des propositions équivalentes.

### Exemples :

1. Le théorème de Pythagore peut être formulé comme une équivalence, l’implication principale et sa réciproque étant vraies simultanément.
2.  $A, B, C$  étant trois points distincts non alignés d’un plan euclidien,  $(AB = AC) \Leftrightarrow (\widehat{ABC} = \widehat{ACB})$ .

## Raisonnements.

Le raisonnement mathématique repose sur l’existence de propositions toujours vraies (qu’on appelle tautologies).

**Proposition 1.** *Les propositions suivantes sont des tautologies :*

1.  $[(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)] \Longrightarrow [p \Rightarrow r]$  (transitivité de l’implication) ;
2.  $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$  (contraposition) ;
3.  $[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$  (distributivité de “ou” par rapport à “et”) ;
4.  $[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$  (distributivité de “et” par rapport à “ou”) ;
5.  $[\neg(\neg p)] \Longleftrightarrow p$  ;
6.  $[\neg(p \text{ et } q)] \Longleftrightarrow [(\neg p) \text{ ou } (\neg q)]$  ;
7.  $[\neg(p \text{ ou } q)] \Longleftrightarrow [(\neg p) \text{ et } (\neg q)]$  (ces deux propriétés s’appellent règles de Morgan) ;
8.  $\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow [p \text{ et } \neg q]$ .

La démonstration de ces propriétés se fait par l’analyse des tables de vérité.

Ainsi pour démontrer, par exemple,  $p \Rightarrow r$  on peut démontrer  $(p \Rightarrow q)$  et  $(q \Rightarrow r)$  : vu que l’implication 1) est une tautologie, si  $(p \Rightarrow q)$  et  $(q \Rightarrow r)$  est vraie alors  $p \Rightarrow r$  est vraie.

**Exemple :**  $a$  et  $b$  étant deux nombres entiers naturels, montrer que l’on a  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ .

On justifie les implications successives :

$$\begin{aligned}(a = b) &\Rightarrow (a - b = 0); \\(a - b = 0) &\Rightarrow ((a - b)(a + b) = 0); \\(a^2 - b^2 = 0) &\Rightarrow (a^2 - b^2 = 0).\end{aligned}$$

D'où le résultat par transitivité.

Ce raisonnement est **une preuve directe**, la rédaction commence toujours par l'hypothèse.

**Preuve par contraposée.** Si l'on veut démontrer  $(p \Rightarrow q)$  on peut démontrer  $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ .

**Exemple :** Montrer que si  $a$  et  $b$  sont deux nombres positifs différents, alors  $\sqrt{a^2 + 1}$  et  $\sqrt{b^2 + 1}$  sont différents.

Montrer que des éléments sont distincts n'est pas toujours aisé. Dans ce cas, il vaut mieux raisonner par contraposée et prouver que si  $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{b^2 + 1}$  alors " $a = b$  et ( $a$  et  $b$  sont positifs)". La rédaction commence toujours par la négation de la conclusion.

Le raisonnement par contraposée peut être considéré comme un cas particulier de raisonnement **par l'absurde**, qui consiste à supposer vraies en même temps la négation de la conclusion et l'hypothèse, pour obtenir une proposition fautive appelée absurdité. Dans le raisonnement par contraposée l'absurdité qu'on obtient est la conjonction de l'hypothèse et de sa négation. L'usage est de ne pas confondre ces deux raisonnements.

**Exemple :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Sous forme d'implication cette proposition s'écrit comme "si  $\mathbb{P}$  est l'ensemble de nombres premiers, alors  $\mathbb{P}$  n'est pas fini". Pour raisonner par l'absurde, nous supposons donc que  $\mathbb{P}$  est l'ensemble des nombres premiers et que  $\mathbb{P}$  est fini. Soit  $n$  le nombre d'éléments de  $\mathbb{P}$ . Soit  $p_1, \dots, p_n$  tous les nombres premiers. On considère le nombre  $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ . Ce nombre est divisible par au moins un nombre premier (on suppose connu le résultat en question). Ce nombre est l'un des  $p_i$ . Comme il divise  $n$  et  $p_1 p_2 \cdots p_n$  à la fois, il divise 1. Voilà l'absurdité (qui ne contient pas la négation de l'hypothèse!).

## Quantificateurs.

Soit  $p(x)$ , une proposition dépendant d'une variable  $x$  qui prend ses valeurs parmi les éléments d'un ensemble. On veut préciser "la quantité" d'objets  $x$  pour lesquels la proposition est vraie. Pour ce faire on associe à  $p(x)$  deux propositions suivantes :

" $\exists x \in E, p(x)$ ", qui est vraie si et seulement si il existe au moins un élément de  $E$  pour lequel  $p(x)$  est vraie.

" $\forall x \in E, p(x)$ ", qui est vraie si et seulement si  $p(x)$  est vraie pour tous les éléments de  $E$ .

$\exists$  est appelé **quantificateur existentiel** et se lit "il existe (au moins) un".

$\forall$  est appelé **quantificateur universel** et se lit "pour tout".

**Exemple :**  $\exists x \in \mathbb{R}, 2x = 5$  est une proposition vraie,  $\forall x \in \mathbb{R}, 2x = 5$  est une proposition fautive.

**Proposition 2.** Les propositions suivantes sont des tautologies :

1.  $\text{non} (\forall x \in E, p(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non } p(x))$  ;
2.  $\text{non} (\exists x \in E, p(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } p(x))$  ;
3.  $\exists x \in E, (p(x) \text{ ou } q(x)) \iff (\exists x \in E, (p(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, q(x)))$  ;
4.  $\exists x \in E, (p(x) \text{ et } q(x)) \implies (\exists x \in E, (p(x)) \text{ et } (\exists x \in E, q(x)))$  ;
5.  $\forall x \in E, (p(x) \text{ et } q(x)) \iff (\forall x \in E, (p(x)) \text{ et } (\forall x \in E, q(x)))$  ;
6.  $(\forall x \in E, p(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, q(x)) \implies \forall x \in E, (p(x) \text{ ou } q(x))$ .

**Exemple :** La proposition (fausse) “le carré de tout réel inférieur à 1 est inférieur à 1” se quantifie sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, ((x < 1) \implies (x^2 < 1)).$$

Sa négation (vraie) s’obtient en utilisant la propriété 1) et la négation d’une implication :

$$\exists x \in \mathbb{R}, ((x < 1) \text{ et } (x^2 \geq 1)).$$

**Remarque importante : place des quantificateurs.** Soit  $p$  une proposition dépendant de deux variables  $x$  et  $y$ . En général les deux propositions  $\exists x \in E, \forall y \in F, p(x, y)$  et  $\forall y \in F, \exists x \in E, p(x, y)$  ne sont pas équivalentes.

**Exemple :** La proposition  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$ , est fausse. Mais la proposition  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y$  est vraie.

### Opérations sur les ensembles.

On appelle **partie** (ou **sous-ensemble**) de l’ensemble  $E$  tout ensemble  $A$  tel que tout élément de  $A$  est un élément de  $E$ . On écrit  $A \subset E$  (on ne confondra pas les deux relations  $\subset$  et  $\in$ ). On dit aussi que  $A$  est inclus dans  $E$ .

L’ensemble vide est une partie de tout ensemble.

Avec les notations de logique introduites, on peut écrire :  $\forall x(x \in A \implies x \in E)$ , ou encore  $\forall x \in A, x \in E$ .

On dit que deux ensembles sont **égaux** s’ils sont constitués exactement de mêmes éléments. On note  $E = F$ . Autrement dit  $E = F$  si et seulement si  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .

$A$  étant une partie de  $E$ , on définit le **complémentaire** de  $A$  dans  $E$  comme étant l’ensemble des éléments de  $E$  qui n’appartiennent pas à  $A$ . On le note  $\mathcal{C}_E(A)$  ou  $E \setminus A$  ou  $E - A$ . On peut aussi écrire  $E \setminus A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$ .

Si  $E$  est un ensemble, on appelle **ensemble des parties** de  $E$  et on note  $\mathcal{P}(E)$  l’ensemble de sous-ensembles de  $E$ . On a donc  $\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$ .

**Exemple :** Si  $E = \{1; 2\}$  alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$ .

Pour tout ensemble  $E$  on a  $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ , car  $\emptyset \subset E$  and  $E \subset E$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles, on appelle **intersection** de  $A$  et  $B$ , et on note  $A \cap B$ , l’ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$ . On appelle **union** (ou **réunion**) de  $A$  et  $B$ , et on note  $A \cup B$ , l’ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  (ou inclusif).

On appelle **couple d’objets** la donnée de deux objets  $x$  et  $y$  dans un certain ordre. Un couple formé par les objets  $x$  et  $y$  est noté  $(x, y)$ . On dit que deux couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont égaux si et seulement si  $x = x'$  et  $y = y'$ .

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles  $E$  et  $F$  et on note  $E \times F$  l’ensemble de tous les couples  $(x, y)$ , avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .

**Exemples :**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\};$$

$[-1; 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in [-1; 1], y \in \mathbb{R}\}$ . Cet ensemble peut être représenté par une bande de largeur 2 autour de l’axe des ordonnées.