Université de Strasbourg
Cercle Mathématique

Année 2011/2012

INÉGALITÉS

Exercice 1.

(a) Soient x et y deux nombres réels, montrer que $2xy \leq x^2 + y^2$ et que $4xy \leq (x+y)^2$.

(b) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ où x et y sont positifs.

(c) Soient $x, y \in]-1, 1[$, démontrer que $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

Exercice 2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels.

(a) Montrer que :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

(b) Etablir que l'inégalité précédente devient une égalité si et seulement si $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ sont proportionnels [1].

(c) Donner une interprétation géométrique de cette inégalité dans le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{u} = (a_1, a_2), \vec{v} = (b_1, b_2)$.

Exercice 3. Trouver la valeur maximale que peut prendre l'expression $3x + y + 2z$ sachant que x, y, z sont trois réels vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En quelle(s) valeur(s) est atteint le maximum ?

Exercice 4. Soient x, y, z trois nombres réels tels que $xyz = 1$, prouver que $(x - 1 + \frac{1}{y})(y - 1 + \frac{1}{z})(z - 1 + \frac{1}{x}) \leq 1$.

Exercice 5. (Inégalité arithmético-géométrique)
Soit $n \geq 2$ un entier, on souhaite montrer la propriété suivante, dite inégalité arithmético géométrique :

$$\mathcal{P}_n : \text{ Soient } a_1, \cdots, a_n \text{ des r ?Ïels strictement positifs, alors } (a_1a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

(a) Rappeler pourquoi $\mathcal{P}_2$ est vraie et déduisez-en que $\mathcal{P}_4$ est vraie.

(b) Montrer que que $\mathcal{P}_{2^p}$ est vraie pour tout $p \geq 1$.

(c) En remarquant que $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ montrer que $\mathcal{P}_3$ est vraie.

(d) Montrer que pour tout $n \geq 2$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n-1}$ l'est aussi.

(e) Conclure.

Exercice 6. Soient x, y, z trois réels strictement positifs vérifiant $x + y + z = 1$, montrer :

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) \geq 64.$$

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

(a) Si $x_1, \cdots, x_n$ appartiennent à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$, quel est le minimum de $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j$?

(b) Qu'en est-il si les réels $x_1, \cdots, x_n$ appartiennent à l'ensemble $[-1, 1]$?

Exercice 8. Montrer que parmi 13 réels distinct pris au hasard, on peut toujours en trouver deux vérifiant l'inégalité :

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

1. C'est àă dire s'il existe un réel k tel que $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \cdots, a_n = kb_n$ ou $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, \cdots, b_n = ka_n$.