Nombres cycliques, CMS 2026-09-23

Exercice 0 : Six fractions mystérieuses

1. Poser la division de 1 par 7 jusqu'à obtenir au moins 8 chiffres après la virgule. Le développement semble-t-il se terminer ? Si non, à partir de quand se répète-t-il ?
2. Procéder de même pour $2/7$ et $3/7$, en écrivant chaque développement décimal sous la forme $0.\overline{\square\square\square\square\square\square}$.
3. Pour chacune des fractions $4/7$, $5/7$ et $6/7$, sans poser la division, proposer une valeur approchée puis un développement décimal exact sous la forme $0.\overline{\square\square\square\square\square\square}$.
4. Comparer les six blocs périodiques obtenus. Qu'ont-ils en commun, et comment passe-t-on de l'un au suivant ?

Exercice 1 : La division posée comme machine à états

Rappel (congruences). On écrit $a \equiv b \pmod{n}$ (ou tout simplement $a \equiv b\ [n]$) pour signifier que n divise $a - b$; on dit alors que a et b sont dans la même *classe résiduelle* modulo n (ils ont le même reste dans la division par n). On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble de ces classes modulo n, et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Rappel (réduction modulo m). On appelle *réduction modulo m* d'une égalité ou d'une somme le fait de la réécrire en remplaçant chaque entier par son reste modulo m : si $A \equiv B \pmod{m}$, alors pour toute somme on obtient une congruence modulo m. Cette technique permet de ne conserver que les restes.

Rappel (période). On appelle *période* du développement décimal d'une fraction $1/p$ (avec p premier, $p \nmid 10$) la longueur ℓ du plus petit bloc de chiffres qui se répète indéfiniment.

On considère la division posée de 1 par 7. On note $r_0 = 1$ le reste initial et, pour tout $k \geq 0$, r_{k+1} le reste obtenu après avoir divisé $10\,r_k$ par 7 ; le quotient de cette division est le \$(k+1)\$-ième chiffre du développement de $1/7$.

1. Calculer la suite $(r_k)_{0 \leq k \leq 6}$ puis vérifier que $r_6 = r_0$. Quel est l'ensemble des valeurs prises par cette suite ?
2. Montrer que pour tout $k \geq 0$, $r_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et que $r_{k+1} \equiv 10\,r_k \pmod{7}$.
3. En déduire que $r_k \equiv 10^k \pmod{7}$ pour tout $k \geq 0$.
4. Montrer que la suite (r_k) est périodique de période divisant 6. Pourquoi, ici, la période vaut-elle exactement 6 ?

Exercice 2 : Une seule piste, six points d'entrée

Rappel (pgcd, ordre). On note $\gcd(a, b)$ le plus grand commun diviseur de a et b ; dire que a est *premier à* b signifie $\gcd(a, b) = 1$.

Soit $n \geq 2$ et a premier à n. On appelle *ordre* de a modulo n le plus petit entier $\mathrm{ord}_n(a) \geq 1$ tel que $a^{\mathrm{ord}_n(a)} \equiv 1 \pmod{n}$. On admet la propriété suivante (résultat classique d'arithmétique) : cet ordre divise tout entier k vérifiant $a^k \equiv 1 \pmod{n}$.

On pose $\mathrm{ord}_7(10)$ l'ordre de 10 modulo 7.

1. Démontrer que $\mathrm{ord}_7(10) = 6$ en listant les résidus de $10, 10^2, \ldots, 10^6$ modulo 7.

2. Soit $k \in \{1, \ldots, 6\}$. Montrer que la suite des restes de la division posée de k par 7 est $(k \cdot 10^j \bmod 7)_{j \geq 0}$.

3. En déduire que les six fractions $1/7, 2/7, \ldots, 6/7$ partagent toutes la même période décimale, chacune commençant à un décalage près.

4. Vérifier numériquement que $142857 \times k$ est une permutation cyclique des chiffres de 142857 pour tout $k \in \{1, \ldots, 6\}$. Expliquer pourquoi ce fait est une conséquence directe de la question 3.

Exercice 3 : Quand la piste se fragmente

On considère maintenant $p = 13$.

1. Calculer $\mathrm{ord}_{13}(10)$ en listant les résidus de $10, 10^2, \ldots, 10^6$ modulo 13. En déduire la période de $1/13$, puis vérifier qu'elle est cohérente avec le développement $1/13 = 0.\overline{076923}$.

2. Construire la suite des restes de la division posée de 1 par 13 et lister l'ensemble des valeurs atteintes.

3. Faire de même pour la division posée de 2 par 13. Les deux ensembles de restes sont-ils disjoints ? Réunis, recouvrent-ils $\{1, \ldots, 12\}$?

4. Montrer que l'ensemble des restes atteints depuis un reste initial r est la classe $\{r \cdot 10^j \bmod 13 \mid j \geq 0\}$.

5. En déduire que les restes non nuls modulo 13 se partitionnent en familles cycliques disjointes de même cardinal. Combien y en a-t-il, et de quelle taille ?

Exercice 4 : Le critère de longueur maximale

Rappel (Fermat, racine primitive). Le *petit théorème de Fermat* garantit que si p est premier et $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; en particulier, pour $n = p$ premier, l'ordre $\mathrm{ord}_p(a)$ divise $p - 1$.

Lorsque p est premier et $\mathrm{ord}_p(a) = p-1$, on dit que a est une *racine primitive* modulo p : les puissances $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ décrivent alors toutes les classes non nulles $1, 2, \ldots, p-1$ modulo p.

On reprend la *période* de l'Exercice 1 et l'*ordre* de l'Exercice 2.

Soit p un premier tel que $p \nmid 10$.

1. Soit ℓ la période du développement décimal de $1/p$. Montrer que ℓ est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $10^k \equiv 1 \pmod{p}$, c'est-à-dire $\ell = \mathrm{ord}_p(10)$.

2. À l'aide du petit théorème de Fermat, montrer que ℓ divise $p - 1$.

3. On dit que p est *premier à période maximale* lorsque $\mathrm{ord}_p(10) = p - 1$. Caractériser cette propriété en termes de racine primitive.

4. Vérifier que $7, 17, 19, 23$ sont à période maximale et que 13 ne l'est pas. Comment se traduit visuellement la différence sur leurs familles de restes ?

Exercice 5 : La symétrie du milieu

On revient à $1/7 = 0.\overline{142857}$, de période $\ell = 6 = 2a$ avec $a = 3$. On note $N_1 = 142$ et $N_2 = 857$ les deux moitiés du bloc.

1. Reprendre la suite $(r_k)_{0\le k\le 5}$ de l'Exercice 1. Que vaut r_3 par rapport à r_0 ?
2. Plus généralement, comparer r_j et r_{j+a} pour $j = 0, 1, 2$.
3. Soit d_j le \$j\$-ième chiffre du développement de $1/7$. En examinant l'opération $10\,r \mapsto (\text{chiffre}, \text{reste})$ de la division posée, montrer que si $r' \equiv -r \pmod 7$ alors le chiffre associé à r' vaut $9 - d$, où d est le chiffre associé à r.
4. En déduire que $d_{j+a} = 9 - d_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, puis que $N_1 + N_2 = 999$.

Exercice 6 : Théorème de Midy

Rappel (lemme d'Euclide). Le *lemme d'Euclide* stipule que si p est premier et divise un produit ab, alors p divise a ou p divise b.

Soit p un premier tel que $p \nmid 10$ et dont la période $\ell = 2a$ est paire. On écrit $1/p = 0.\overline{N_1 N_2}$ où N_1 et N_2 sont des entiers de a chiffres (éventuellement complétés à gauche par des zéros).

1. Justifier l'écriture
$$\frac{1}{p} = \frac{N_1 \cdot 10^a + N_2}{10^{2a} - 1}$$
et en déduire $N_1 \cdot 10^a + N_2 = \dfrac{10^{2a} - 1}{p}$.
2. Factoriser $10^{2a} - 1$ et montrer, à l'aide du lemme d'Euclide, que $p \mid (10^a + 1)$. Justifier pourquoi l'hypothèse de minimalité de la période exclut $p \mid (10^a - 1)$.
3. Poser $m = \dfrac{10^a + 1}{p} \in \mathbb{Z}$. En réduisant modulo $10^a - 1$, montrer que $N_1 + N_2 \equiv 0 \pmod{10^a - 1}$.
4. Encadrer $N_1 + N_2$ entre 0 et $2(10^a - 1)$ et conclure que
$$N_1 + N_2 = 10^a - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{a \text{ fois}}.$$
5. Vérifier le théorème sur $1/7$ et $1/13$ (famille de période 6). On donne le développement de $1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$ (période 16) ; le vérifier également.

Exercice 7 : La découpe en plus de deux parts

Soit p un premier tel que $p \nmid 10$, de période $\ell = na$ avec $n \ge 2$. On découpe le bloc périodique en n morceaux de a chiffres $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

1. Écrire l'entier périodique complet $N = N_1 \cdot 10^{a(n-1)} + \cdots + N_n$ et justifier que $N = \dfrac{10^{na} - 1}{p}$.
2. Montrer que modulo $10^a - 1$, on a $10^{am} \equiv 1$ pour tout m, et en déduire $N \equiv N_1 + \cdots + N_n \pmod{10^a - 1}$.
3. Factoriser $10^{na} - 1$ à l'aide de l'identité $x^n - 1$ pour $x = 10^a$, puis montrer que p divise le facteur $10^{a(n-1)} + \cdots + 1$ (on justifiera $\gcd(p, 10^a - 1) = 1$).
4. En déduire que N est multiple de $10^a - 1$, puis que
$$\sum_{i=1}^{n} N_i = C \cdot (10^a - 1)$$
pour un entier C vérifiant $1 \le C \le n - 1$.

5. Appliquer ce résultat à 1/7 découpé en 3 parts de 2 chiffres, à 1/19 en 3 parts de 6 chiffres, et à 1/17 en 4 parts de 4 chiffres. Déterminer C dans chaque cas. On donne les développements : $1/19 = 0.\overline{052631578947368421}$ (période 18) et $1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$ (période 16).