

## Fractions continues et géométrie des nombres

### Exercice 1 : Découverte de l'algorithme et du nombre d'or

Une fraction continue est une expression de la forme

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

où  $a_0, a_1, a_2, \dots$  et  $b_1, b_2, b_3, \dots$  sont des nombres réels ou complexes. Le cas le plus courant est celui des fractions continues simples, où tous les  $b_i$  valent 1 et les  $a_i$  sont des entiers (souvent positifs). Dans la suite une fraction continue est définie avec  $b_1 = b_2 = \dots = 1$  et les  $a_i$  sont entiers naturels.

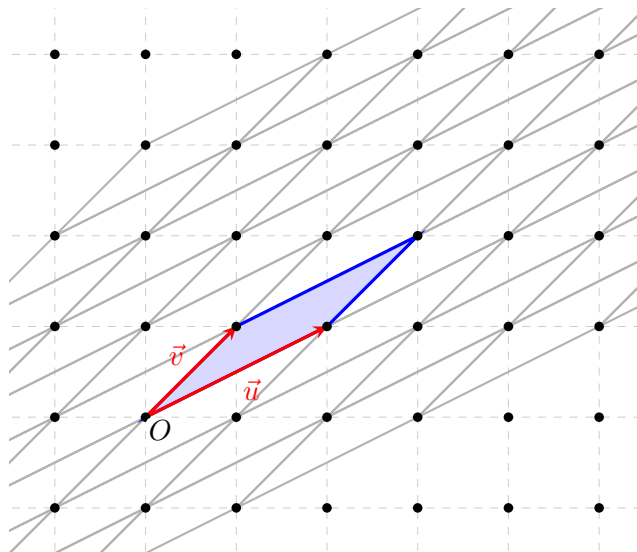
1. On considère la fraction  $\frac{10}{7}$ .
  - (a) Déterminer le plus grand entier qui n'est pas strictement supérieur à cette fraction.
  - (b) En inversant la fraction restante, montrer que  $\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}$ .
  - (c) En itérant ce processus, établir que  $\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ .
2. L'expression obtenue est le développement en fraction continue du nombre  $\frac{10}{7}$ .
  - (a) En utilisant le principe de la division euclidienne, justifier pourquoi ce procédé produit toujours une représentation finie pour un nombre rationnel.
  - (b) Que peut-on déduire du processus si le nombre initial est irrationnel?
3. On note  $\phi$  le nombre donné par la fraction continue dont tous les coefficients valent 1, soit  $1 + \frac{1}{1 + \dots}$ .
  - (a) Montrer que ce nombre satisfait l'équation  $1 + \frac{1}{x} = x$ .
  - (b) En déduire la valeur exacte de  $\phi$ , sachant qu'il doit être positif.
4. (\*) Quel est la fraction continue de  $e$  et  $\tanh 1$ ?

### Exercice 2 : Géométrie des nombres et pavage du plan

À la base de la géométrie des nombres se trouve un simple quadrillage de coordonnées. On s'intéresse aux parallélogrammes "vides", c'est-à-dire dont les sommets sont des points du réseau à coordonnées entières et qui ne contiennent aucun autre point du réseau, ni à l'intérieur ni sur leurs côtés.

Par exemple, le parallélogramme de la figure suivante est généré par les vecteurs  $\vec{u} = (2, 1)$  et  $\vec{v} = (1, 1)$ , dont le déterminant vaut  $2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$ . Il ne contient donc aucun autre point du réseau.

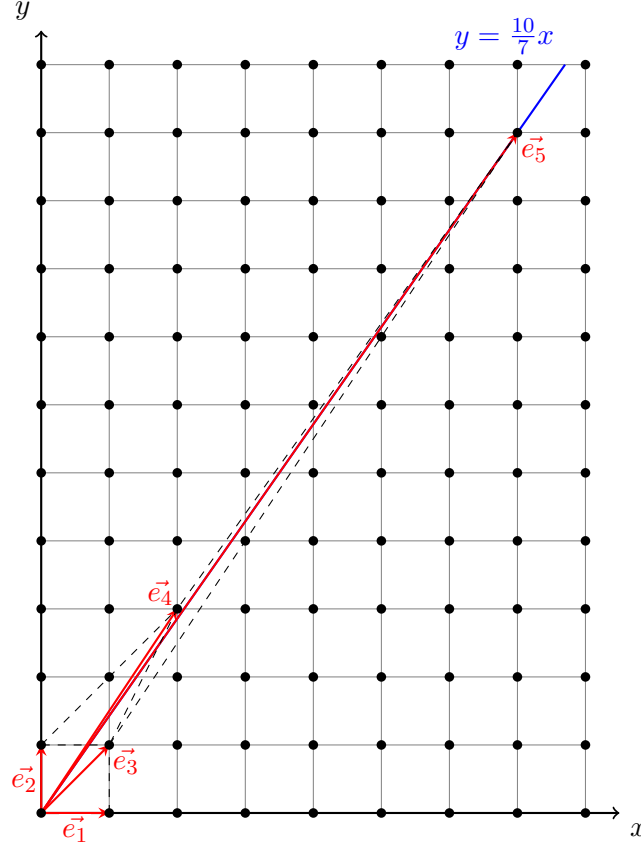
Dans l'exercice on considère un parallélogramme vide arbitraire.



1. En tradant ce parallélogramme par toutes les combinaisons possibles de ses vecteurs générateurs, justifier que l'on peut recouvrir le plan entier de la même manière qu'avec des carrés unités.
2. Soit  $S$  l'aire de ce parallélogramme. On considère une très grande région du plan d'aire  $A$ .
  - (a) Exprimer approximativement le nombre de parallélogrammes contenus dans cette région en fonction de  $A$  et  $S$ .
  - (b) Justifier que chaque parallélogramme possède 4 sommets, mais que chaque sommet est partagé par exactement 4 parallélogrammes adjacents.
  - (c) En déduire que le nombre de points entiers dans la région est approximativement égal au nombre de parallélogrammes.
  - (d) Conclure que l'aire  $S$  d'un tel parallélogramme vide est exactement égale à 1.
3. On admet que l'aire orientée d'un parallélogramme engendré par les vecteurs de coordonnées  $(a, b)$  et  $(c, d)$  est donnée par le déterminant  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Si ce parallélogramme est vide, que peut-on dire de la valeur absolue de  $ad - bc$  ?

### Exercice 3 : L'algorithme des “nez tirés”

La construction d'une fraction continue pour un nombre  $\alpha$  est liée à la recherche des points entiers les plus proches de la droite d'équation  $y = \alpha x$ . On se place dans un repère avec les vecteurs de base  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  et  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .



1. L'algorithme consiste à ajouter  $\vec{e}_2$  à  $\vec{e}_1$  tant que la somme ne traverse pas la droite. Déterminer le plus grand entier  $a_0$  tel que  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + a_0 \vec{e}_2$  reste sous la droite  $y = \frac{10}{7}x$ .
2. Pour construire  $\vec{e}_4$ , on ajoute à  $\vec{e}_2$  le vecteur  $\vec{e}_3$  multiplié par un entier  $a_1$  de manière à ce que  $\vec{e}_4$  reste au-dessus de la droite, mais la traverserait si l'on ajoutait  $\vec{e}_3$  une fois de plus. En déduire  $a_1$ .
3. En posant  $\vec{e}_5 = \vec{e}_3 + a_2 \vec{e}_4$ , justifier que pour  $a_2 = 3$ , on atterrit directement sur la droite. Conclure sur le lien avec la fraction continue obtenue à l'Exercice 1.

#### Exercice 4 : Précision de l'approximation

Soient  $(q_k, p_k)$  les coordonnées entières du vecteur  $\vec{e}_k$ . La fraction  $\frac{p_k}{q_k}$  constitue une approximation de  $\alpha$ .

1. À chaque étape de la construction précédente, justifier géométriquement à l'aide de l'Exercice 2 que le parallélogramme engendré par  $\vec{e}_k$  et  $\vec{e}_{k+1}$  est d'aire absolue 1. En déduire que  $|p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1}| = 1$ .
2. La droite  $y = \alpha x$  passe à l'intérieur du parallélogramme engendré par  $\vec{e}_k$  et  $\vec{e}_{k+1}$ . En comparant les angles, justifier l'inégalité  $|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}$ .
3. Démontrer algébriquement que  $|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ .
4. Sachant que  $q_{k+1} > q_k$ , conclure que l'erreur d'approximation  $\alpha \approx \frac{p_k}{q_k}$  est strictement inférieure à  $\frac{1}{q_k^2}$ .

## Exercice 5 : Périodicité et Théorème de Lagrange

Le théorème de Lagrange stipule qu'une fraction continue est périodique si et seulement si le nombre représenté est un irrationnel quadratique (de la forme  $a + b\sqrt{c}$  avec  $a, b, c$  rationnels).

1. Soit un nombre  $\beta$  défini par une fraction purement périodique de période 1 :  $\beta = \frac{1}{b_1 + \beta}$ . Montrer que  $\beta$  vérifie l'équation du second degré  $\beta^2 + b_1\beta - 1 = 0$ .
2. Soit un nombre  $\alpha$  dont la fraction continue comporte une partie initiale finie et une queue périodique notée  $\beta$ , tel que  $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \beta}}$ .
  - (a) Exprimer  $\alpha$  sous la forme  $\frac{E\beta + F}{G\beta + H}$ , où  $E, F, G, H$  sont des entiers.
  - (b) En déduire que  $\alpha$  satisfait une équation du second degré à coefficients entiers, et est donc un irrationnel quadratique.

## Exercice 6 : Racines carrées et Équation de Pell

Pour tout entier  $n$  n'étant pas un carré parfait, l'équation  $p^2 - nq^2 = \pm 1$  (souvent appelée à tort équation de Pell) admet une solution entière non triviale avec  $q \neq 0$ .

1. On pose  $n = 2$  et  $\alpha = \sqrt{2} + 1$ .
  - (a) Démontrer algébriquement que  $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{2} - 1$ .
  - (b) En déduire que  $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha}$ .
  - (c) Conclure que la fraction continue de  $\sqrt{2}$  s'écrit  $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ .
2. L'équation de Pell pour  $n = 2$  s'écrit  $p^2 - 2q^2 = 1$  ou  $p^2 - 2q^2 = -1$ .
  - (a) Calculer les premières approximations rationnelles  $\frac{p_k}{q_k}$  de  $\sqrt{2}$  en tronquant sa fraction continue à différentes étapes.
  - (b) Vérifier que les couples  $(p_k, q_k)$  successifs fournissent des solutions entières à l'équation de Pell.

## Le Théorème de Kuzmin et la répartition des quotients partiels

### Exercice 1 : La découverte de Gauss et la probabilité d'un quotient

Gauss a déterminé la probabilité qu'un terme  $a_i$  d'une fraction continue prenne une valeur entière donnée  $k \geq 1$ , pour un nombre réel dans  $[0, 1]$  (donc  $a_0 = 0$ ) choisi au hasard. Il a établi que la probabilité  $p_k$  qu'un quotient prenne la valeur  $k \geq 1$  est donnée par l'expression  $p_k = C \ln \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)$ , où  $C$  est une constante réelle.

On considère la fraction continue aléatoire telle que  $\mathbb{P}(a_k = k) = p_k$  où  $p_k = C \ln \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)$ .

1. En réduisant au même dénominateur, montrer que  $1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ .
2. En utilisant les propriétés fondamentales du logarithme népérien, exprimer  $p_k$  sous la forme

$$C (2 \ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+2)).$$

## Exercice 2 : Somme télescopique et constante de normalisation

Pour que  $p_k$  définisse une probabilité valide sur l'ensemble des entiers strictement positifs, il est nécessaire que la somme de toutes ces probabilités, de  $k = 1$  à l'infini, soit exactement égale à 1. On s'intéresse à la somme partielle  $S_N = \sum_{k=1}^N p_k$ .

1. On pose la suite  $u_k = \ln(k+1) - \ln(k)$ . Vérifier algébriquement que l'on peut écrire  $p_k = C(u_k - u_{k+1})$ .
2. En écrivant les premiers termes de la somme  $S_N$ , justifier que la majorité des termes s'annulent entre eux selon le principe de la somme télescopique.
3. En déduire l'expression simplifiée :

$$S_N = C \left( \ln 2 - \ln \left( 1 + \frac{1}{N+1} \right) \right)$$

1. Déterminer la limite de  $S_N$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.
2. Sachant que cette limite doit valoir 1, en déduire que la constante de normalisation est  $C = \frac{1}{\ln 2}$ .

## Exercice 3 : L'anomalie des petits coefficients et le paradoxe des bornes

On utilise désormais la formule exacte de Kuzmin :  $p_k = \frac{1}{\ln 2} \ln \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)$ .

1. Fréquence du chiffre 1 :
  - (a) Calculer la valeur exacte de  $p_1$ .
  - (b) Sachant que  $\frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{4}{3} \right) \approx 0,41$ , interpréter ce résultat quant à la fréquence d'apparition du nombre 1 dans les développements en fraction continue.
2. Comportement asymptotique :
  - (a) Pour de très grandes valeurs de  $k$ , justifier l'approximation  $\frac{1}{k(k+2)} \approx \frac{1}{k^2}$ .
  - (b) En utilisant l'approximation  $\ln(1+u) \approx u$  pour  $u$  proche de 0, montrer que lorsque  $k$  devient très grand, la probabilité  $p_k$  décroît de manière inversement proportionnelle au carré de  $k$ .
3. Le paradoxe des coefficients bornés : On s'intéresse à un nombre réel artificiel dont la totalité des quotients de la fraction continue appartiendrait à l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 9\}$ .
  - (a) À l'aide de l'expression de  $S_N$  obtenue à l'Exercice 2, calculer la probabilité exacte qu'un coefficient donné soit strictement supérieur à 9. (On l'exprimera sous la forme d'un quotient de logarithmes).
  - (b) En considérant qu'un tel nombre comporte une infinité de coefficients, justifier d'un point de vue probabiliste pourquoi l'événement consistant à ce que **tous** les coefficients restent indéfiniment inférieurs ou égaux à 9 est un phénomène de probabilité globale (ou mesure) nulle.