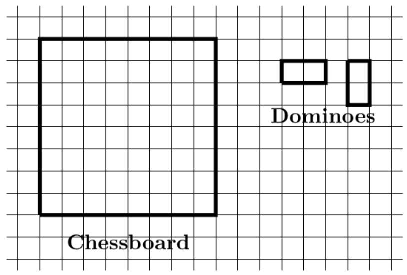
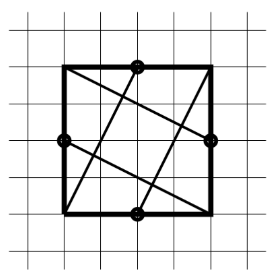
Problem 1

1. Est-il possible de placer des points dans les cases d'un carré 8×8 (un seul point par case) de sorte que le nombre de points dans chaque colonne soit identique, tout en ayant un nombre de points différent dans chaque ligne ?
2. Est-il possible de couvrir toutes les cases d'un échiquier avec 32 dominos (chaque domino couvrant exactement deux cases) de telle manière qu'aucun domino ne couvre un carré 2×2 ?



3. Combien de carrés y a-t-il dans un carré 7×7 ? Combien de carrés y a-t-il dans un carré $n \times n$?
4. Combien de rectangles dont les côtés sont alignés sur les lignes de la grille y a-t-il dans un carré 7×7 ? Combien de rectangles dont les côtés sont alignés sur les lignes de la grille y a-t-il dans un carré $n \times n$?
5. Connectez les sommets d'un carré de manière cyclique aux milieux des côtés opposés. Ces quatre lignes forment un quadrilatère intérieur au carré d'origine.
   - Quel type de quadrilatère est-ce ?
   - Quelle fraction de l'aire du carré d'origine représente-t-il ?
   - Que se passe-t-il si vous remplacez le milieu par un point situé à une fraction r de chaque côté ?



Problem 2

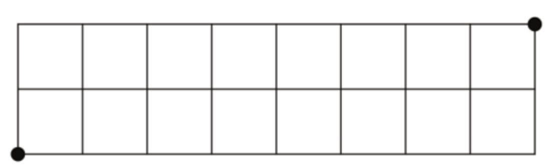
Termes géométriques standards

- Un **polygone** est une figure 2D avec des côtés droits.
  - Chaque côté est appelé une **arête**.
  - Le point où deux arêtes se rencontrent est appelé un **sommet**.
- Un **polyèdre** est une figure 3D avec des faces polygonales.
  - Chaque face est un **côté**.
  - Le segment de droite où deux faces se rencontrent est une **arête**.
  - Un point où plusieurs arêtes se rencontrent est un **sommet**.

- Une figure est **convexe** si tout segment de droite reliant deux points de la figure reste entièrement à l'intérieur de celle-ci.
- Un **solide de Platon** est un polyèdre convexe dont :
  - Les faces sont des polygones réguliers congruents.
  - Le même nombre de faces se rencontre à chaque sommet.
  - Il n'existe que cinq solides de Platon : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, et icosaèdre.

Problèmes

1. Pourquoi n'existe-t-il que cinq solides de Platon ?
2. Placez un point au centre de chaque face d'un cube et connectez les points situés sur les faces adjacentes. Ces segments forment un solide. Quel est ce solide ? Que se passe-t-il si vous répétez ce processus avec un octaèdre, un dodécaèdre, un icosaèdre, ou un tétraèdre ?
3. Que reste-t-il si vous placez un point au milieu de chaque arête d'un triangle, connectez les points des arêtes adjacentes par un segment, et découpez les coins le long de ces segments ? Que se passe-t-il si vous commencez avec un tétraèdre régulier à la place d'un triangle ? Et si vous commencez avec un icosaèdre régulier, divisez chaque arête en trois, et utilisez ces marques pour couper les sommets ?
4. Combien de diagonales possède un polygone convexe ? (Exemples : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, hendécagone, polygone à 100 côtés, polygone à n côtés)
5. Combien de sommets, arêtes et faces possède chaque solide de Platon ? Et une buckyball ?
6. Combien de diagonales spatiales possède chaque solide de Platon ? Et une buckyball ? (Une diagonale spatiale relie deux sommets d'un solide sans être une arête et sans se trouver sur une face.)
7. Dans un petit pays, il y a 10 villages, et chaque paire de villages est reliée par une route. Combien de routes y a-t-il ? Et s'il y a 73 villages ?
8. Deux équipes, **Chasseurs d'Étoiles** et **Gardiens des Rivières**, organisent une compétition de mathématiques chaque samedi pendant une année entière. Les **Chasseurs d'Étoiles** comptent 12 membres et souhaitent désigner deux co-capitaines différents chaque samedi. Est-ce possible sans répéter une paire de co-capitaines ?
9. Dans le plan de rues de la Figure suivante, **Ali** se trouve en bas à gauche et souhaite rejoindre sa maison en haut à droite. Ali ne peut se déplacer qu'en montant (nord) ou à droite (est). Combien de chemins différents peut-il emprunter pour atteindre sa maison ?



10. Colorez en rouge certaines diagonales faciales d'un cube et le reste en bleu, de manière à former deux tétraèdres congruents, l'un avec des arêtes rouges et l'autre avec des arêtes bleues. Quel solide est formé par l'intersection de ces deux tétraèdres ?
11. Sur un dodécaèdre, colorez une diagonale de chaque face en rouge pour que ces diagonales forment un cube. Répétez le processus avec d'autres couleurs jusqu'à obtenir cinq cubes différents. Quel solide est formé par l'intersection de ces cinq cubes ?
12. Supposons que chaque arête d'un dodécaèdre régulier mesure 1 unité de longueur. Trouvez le diamètre de la sphère circonscrite autour du dodécaèdre.