Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2024-11-27

Question 1

Pour que le sapin de la place Kleber (assimilable à un cône) soit le plus impressionnant possible, on cherche à maximiser son volume par rapport à sa surface (base et surface latérale). Quel doit être le rapport entre sa hauteur et son rayon à la base ?

Question 2

Le marché de Noël est représenté par un carré quadrillé de côté entier dans lequel les carrés de côté 1 peuvent être remplis par des chalets ou laissés libres pour laisser passer les visiteurs. Comment maximiser le nombre de chalets pour que tous soient accessibles par les visiteurs dans les allées du marché (pas par l'extérieur du carré) et que pour des raisons de sécurité tous les visiteurs puissent quitter le marché par un chemin inférieur à la moitié de la longueur du carré ?

Question 3

Plutôt que d'aller au marché de Noël, Talia préfère faire des gâteaux pour ses amis. Elle en fait de trois sortes : des étoiles au citron, des fleurs à l'orange et des losanges à la cannelle. Elle les répartit en trois paquets de même taille totale (mais qui n'ont pas autant de gâteaux de chaque sorte) : un pour Amélie avec une progression arithmétique des nombres de gâteaux, un pour Gaspard avec une progression géométrique des nombres de gâteaux, et un pour Elin avec autant d'étoiles que de fleurs, mais pas de losanges. Combien Talia a-t-elle fait de gâteaux au minimum ? Et si on suppose qu'en plus Talia a fait autant de gâteaux de chaque sorte ?

Problème 1

Soit $\frac{m}{n}$ une fraction. On commence par le nombre $1 + \frac{m}{n}$, à chaque étape on peut soit ajouter la fraction $\frac{m}{n}$, soit prend l'inverse. La pérennité de la fraction $\frac{m}{n}$ est le nombre minimum d'étapes on a besoin pour arriver à 1.

Par exemple, si la fraction est $\frac{1}{2}$, alors on peut faire

$$\frac{3}{2} \to 2 \to \frac{1}{2} \to 1.$$

Il se trouve que la pérennité de $\frac{1}{2}$ est 4.

1. Quelle est la pérennité de $\frac{1}{3}$? Peux tu trouver deux façon d'aboutir à 1 avec le nombre minimum d'étapes?
2. Quelle est la pérennité de 1/4, 1/5?
3. Pour une fraction de la forme $\frac{1}{n}$, quelle est sa pérennité pour $n = 2, 3, 4, \cdots, 16$?
4. Est-ce que une fraction de la forme $\frac{1}{n}$ a toujours une pérennité finie?
5. Si oui, peux tu proposer une formule pour la pérennité de $\frac{1}{n}$?
6. Existe-il une fraction avec une pérennité infinie?
7. Est-ce que une fraction de la forme $\frac{n-1}{n}$ a toujours une pérennité finie?
8. Quelle est la pérennité de $\frac{n-1}{n}$?

9. Combine de nombres on peut atteindre en N étapes avec les deux opérations?
10. Est-ce que $\frac{9}{11}$ a une pérennité finie?

Problème 2

1. On commence par les nombres naturels

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$$

Ensuite, en retirant un nombre sur deux, on obtient la suite des nombres impairs. Ainsi, la nouvelle suite de nombres est : 1, 3, 5, 7, 9, ... En prenant des sommes partielles, on obtient : 1, 4, 9, etc, quelle est votre conclusion?

2. Prenons à nouveau tous les nombres naturels et en retirant un nombre sur trois, ce qui donne la suite de chiffres suivante : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13,...

Nous prenons ensuite la somme partielle pour obtenir une nouvelle suite : 1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, 48, 61,...

Ensuite, nous retirons à nouveau un nombre sur deux ce qui donne : 1, 7, 19, 37, 61,... Enfin, en prenant à nouveau la somme partielle, nous obtenons : 1, 8, 27, 64, 125,..., que constates vous? Pouvez vous démontrer ça?

3. Les nombres triangulaires sont les $1, 3, 6, 10, \cdots$, qui compte le nombre de points dans un triangle équilatéral de taille n. On recommence par les nombres naturels $1, 2, \cdots$, on retire les nombres triangulaires, pour obtenir

$$2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, \cdots,$$

Puis on fait sommes partielles, on a

$$2, 6, 11, 18, 26, 35, 46, 58, \cdots,$$

on retire les nombres à la position $1, 3, 6, 10, \cdots$, on obtient

$$6, 18, 26, 46, 58, 71, 101, \cdots,$$

et on fait la somme partielle, quelle est la suite que vous obtenez?

4. On peut essayer avec d'autre suite de nombres, comme par exemples
   (a) Les nombres carrés $1, 4, 9, \cdots$,
   (b) Les nombres hypercubes $1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$,
   (c) Les nombres pentagone: $\frac{n(3n-1)}{2}$
   (d) Les nombres pyramides.
   (e) Les nombres $1, 5, 14, 30, 55, 91, \cdots$, (qu'est-ce que c'est?)