

Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2024-10-15

Q 1 Quels sont les nombres à 4 chiffres s'écrivant ABCD qui divisent leur renversé s'écrivant DCBA ?

Q 2 Lisa et Ruben ont disposé 100 jetons sur une table. Chacun à son tour doit enlever au moins un jeton mais laisser au moins la moitié des jetons (qui ne peuvent pas être cassés) sur la table. Lisa commence. Peut-elle s'assurer de gagner ?

Q 3 Thomas doit remplir un tableau de texte réparti sur deux lignes et deux colonnes. On note a, b, c, d les quantités de texte dans ces cases lues de gauches à droite et de haut en bas. La hauteur des cases doit être suffisante pour que l'aire de la case soit supérieure à la quantité de texte. Par exemple, si le tableau est de largeur L et que chaque colonne a une largeur $\frac{L}{2}$, la hauteur h de la première rangée doit vérifier les inégalités $\frac{hL}{2} \geq a$ et $\frac{hL}{2} \geq b$. Comment Thomas doit-il placer la séparation entre les deux colonnes pour minimiser la hauteur totale du tableau ?

Q 4

1. Augustin trouve un jeu de dominos dans lequel chaque domino porte deux nombres (pouvant être égaux) entre 0 et n . Il n'y a pas deux dominos identiques (y compris en reversant l'ordre des deux nombres) et tous les dominos possibles sont présents. Combien y a-t-il de dominos ?
2. Peut-on faire une chaîne avec tous les dominos pour que la 2e valeur d'un domino coïncide avec la 1re valeur du domino suivant ?
3. Si oui, peut-on s'arranger pour que la 2e valeur du dernier domino corresponde à la 1re valeur du premier domino ?
4. Si oui, peut-on effectivement poser ces dominos de façon à faire une boucle en supposant que les dominos sont tous de même taille, constitués de deux carrés juxtaposés le long d'un côté commun ?

Q 5 Lauriane doit rentrer les notes de son paquet de n copies dans un tableur trié selon les noms de famille, ce qui ne correspond pas à l'ordre de tri des copies. Pour chaque copie, elle déplace donc la sélection de cellule verticalement pour aller sur la ligne correspondant à la copie suivante. Combien de fois doit-elle changer de ligne en moyenne entre deux copies consécutives ? Combien cela représente-t-il d'appui sur les touches de flèches pour rentrer toutes les notes ?

Q 6 Soit p un nombre premier, on définit l'égalité module p pour des entiers x, y par $x = y[p]$ si et seulement si $x - y$ est un multiple de p . Pour des fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, on définit l'égalité module p , et on note $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}[p]$ si $ad = bc[p]$.

Fixe $0 < j, k < p - 1$, la somme de Jacobi est définie par

$$J_{j,k} = \sum_{x=2}^{p-1} x^{-j} (1-x)^{-k},$$

Calculer les valeurs pour $j = k = 1$ et $p = 3, 5, 7, 11$ les valeurs de $J_{j,k}$, que constatez vous? Et pour $j = 2, k = 1$? Quelle est la valeur de $J_{j,k}$ modulo p ?