

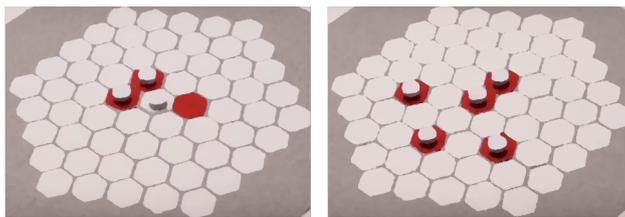
Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2023-12-13

Énigme des ruches

Au départ, nous disposons d'une ruche vide de taille 5. Nous avons la possibilité d'introduire des abeilles dans les alvéoles afin qu'elles puissent construire de la cire à l'intérieur. Voici les règles qui régissent ces créatures :

1. Si l'on met une abeille dans une alvéole, elle cirera cette dernière.
2. Si une alvéole est entourée de trois alvéoles ou plus contenant de la cire, les abeilles y pénètrent pour y commencer la production de cire, résultant ainsi en le cirage de cette alvéole. Les abeilles ont la liberté de se déplacer à travers les ruches.
3. Les abeilles ne vont pas cirer les alvéoles qui ne vérifient pas critère dans 2).

Combien d'abeilles minimum faut-il pour que la ruche soit entièrement cirée après un certain temps ?



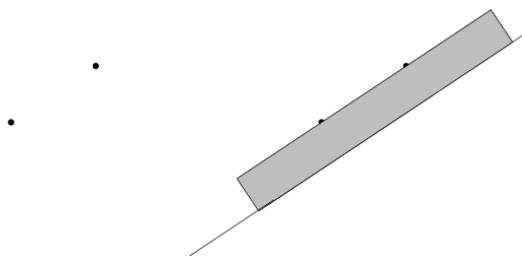
Dans la figure à gauche, l'abeille pénètre dans une alvéole entourée de trois alvéoles cirées, tandis qu'à droite, les abeilles demeurent à leur position initiale.

Pour commencer: combien peut-on remplir d'alvéoles avec 3 abeilles ?

Le tracé à l'aide d'une règle bilatérale

Imaginez que vous ayez une règle avec des bords parallèles, infiniment longs, et sans marques de mesure. Nous l'appelons "règle à double face", pour la distinguer de la règle sans graduation couramment utilisée dans la construction de graphiques, appelée "règle simple".

En plus des utilisations classiques de la règle simple pour construire des lignes droites entre deux points ou trouver l'intersection entre une ligne droite et un graphe donné, nous stipulons que la règle à double face permet également ce qui suit : *étant donné deux points distincts sur un plan, tracer une ligne droite orientée de telle sorte que les deux points soient situés à gauche de la ligne, et que la distance entre les deux points soit égale à une unité (voir figure).*



Se donner un cercle dans le plan, peut-on trouver le centre du cercle en utilisant seulement la règle bilatérale? Peut-on tracer un pentagone circonscrit? Peut-on tracer un pentagone sans cercle donné?

Pour commencer: essayer de construire le symétrique d'un point par rapport à un autre, puis le milieu d'un segment, puis n'importe quelle fraction d'un segment. Ensuite, on peut construire la bissectrice d'un angle aigu et reporter une longueur d'une droite à une autre.

Nombre de longueurs minimum

En choisissant 4 points dans un plan, ils créent 6 segments. Quel est le nombre minimum de longueurs apparaissent parmi ces 6 segments? Dans le cas ce nombre est minimisé, quelles sont les possibilités ? Si on modifie le nombre de points? Si on s'autorise d'aller en dimension plus grande?

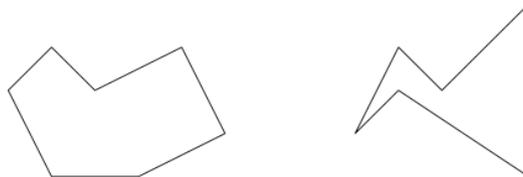


Dans la figure à gauche, il y a deux longueurs; tandis qu'à droite, il y en a quatre.

Sécurité de galerie

Une galerie d'art a un mur qui forme un polygone (pas nécessairement régulier, voire même pas nécessairement convexe). Les agents de sécurité sont positionnés à des endroits fixes à l'intérieur de la galerie. Supposons que les agents de sécurité puissent tourner la tête mais ne peuvent pas se déplacer. Combien d'agents de sécurité sont nécessaires au minimum pour s'assurer que chaque centimètre de mur est visible par au moins un agent de sécurité dans une galerie de forme un polygone à n côtés?

Si l'on désigne par n le nombre de côtés du polygone, on peut commencer par $n = 3, 4, 5$ et 6 .



Pour commencer: Voici deux galeries possibles, combien d'agents de sécurité sont nécessaires pour ces deux galeries? Où va-t-on les placer? Est-il possible de trouver une galerie qui nécessite la présence de 5 agents de sécurité?