Bijections explicites

Numérotations d'ensembles finis

Il s'agit de décrire des ensembles en associant à chaque élément un entier strictement positif, de façon à ce que deux éléments différents aient toujours un numéro différent et que tous les entiers soient utilisés entre 1 et le plus grand numéro.

1. Proposer trois manières de numéroter les sommets du quadrillage sur une feuille à petits carreaux. Quelle manière permet le plus facilement de trouver un sommet à partir de son numéro ?
2. Numéroter les sommets d'un pavage triangulaire d'un triangle équilatéral puis d'un hexagone.
3. Numéroter les mots de cinq lettres sur notre alphabet de 26 lettres (il s'agit de mots au sens mathématique, ils n'ont pas forcément de signification en français, comme AZXMM). Peut-on les numéroter de façon à ce qu'ils soient rangés dans l'ordre lexicographique (comme dans un dictionnaire) ? Et si on considère tous les mots de 5 lettres ou moins ?
4. Numéroter les différents dominos dont chaque côté contient entre 0 et 6 points (ou plus généralement entre 0 et n points).

Énumérations d'ensembles infinis

Pour chacun des ensembles ci-dessous, il s'agit ici de définir une suite qui parcourt tous les éléments de l'ensemble (condition de surjectivité) sans se répéter (condition d'injectivité).

5. Peut-on numéroter tous les entiers relatifs ? les entiers pairs ? les impairs ? les entiers qui ne sont pas multiples de 3 ? ceux qui ne sont pas des puissances de 2 ? les nombres premiers ?
6. Peut-on numéroter les points du plan de coordonnées entières et positives ? ceux dont les coordonnées ont une somme paire ? un produit pair ?
7. Peut-on numéroter tous les mots mathématiques que l'on peut former sur un alphabet de 26 lettres ? Est-ce possible que cette numérotation suive l'ordre lexicographique ?
8. Peut-on numéroter tous les mots mathématiques sur un alphabet infini (lui-même numérotable) $\{A_1, A_2, \ldots\}$?
9. Peut-on numéroter les ensembles finis d'entiers naturels ? les suites finies croissantes d'entiers naturels ? les rationnels ?

Bijections entre ensembles infinis

Il s'agit de construire une application à la fois injective et surjective entre deux ensembles.

10. Peut-on relier bijectivement les intervalles $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 1[$, $[0, +\infty[$, $\mathbf{R}$?
11. Peut-on relier bijectivement le segment $[0, 1]$ et le carré $[0, 1]^2$?
12. Peut-on relier bijectivement l'intervalle $[0, 1]$ et l'ensemble de ses irrationnels ?
13. Peut-on relier bijectivement l'intervalle $[0, 1]$ et l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$?