Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2024-05-22

Fonction continue

Soient $f, g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall 0 \leq x \leq 1$, on a

$$f(x,x) = 0,\ f(0,x) + f(x,1) = 1,$$

$$g(x,x) = 0,\ g(0,x) + g(x,1) = 1.$$

Montrer qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que $f(a,b) = g(a,b) = \frac{1}{2}$.

Problème de carburant

Supposons que deux voitures de course totalement identiques circulent sur une piste de course circulaire, l'une dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre dans le sens contraire. On sait que chaque voiture a besoin exactement d'une unité de carburant pour faire un tour complet (chacune peut transporter une unité de carburant). De plus, il est connu qu'il y a au moins 2 unités de carburant au total installées dans plusieurs stations-service le long de la piste.

La question est la suivante : pour n'importe quelle distribution de stations-service et de carburant le long de la piste, peut-on toujours organiser de manière adéquate que les deux voitures partent du même endroit sur la piste, sans carburant, de sorte qu'elles puissent toutes deux faire un tour complet ?

Série base 2

Soit $q \in \mathbb{Q}$, on peut toujours écrire $q = \frac{2^m P}{Q}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et P, Q impairs, et dans ce cas là on dit que $|q|_2 = 2^{-m}$. Soit $S_N = \Sigma_{n=1}^{N} \frac{2^n}{n}$ et $T_N = \Sigma_{n=1}^{N} \frac{2^n}{n^2}$.

1. Montrer que $\lim_{N\to\infty} |S_N|_2 = 0$.
2. Montrer que $\lim_{N\to\infty} |T_N|_2 = 0$.
3. Soit $N = 2^k$ avec $k \geq 4$ entier, montrer que $|S_N|_2 = 2^{2-N-2k}$.

Croissance?

Spot $p_1 = 2,\ p_2 = 3, \cdots$, la suite des nombres premiers. Se donner un nombre naturel N_1, on construire par récurrence la suite suivante:

1. Écrire N_1 dans la base 2, changer la base en 3 puis faire moins 1, on obtient N_2;
2. Écrire N_2 dans la base 3, changer la base en 5 puis faire moins 1, on obtient N_3;
3. etc
4. en général, on écrire N_m dans la base p_m, puis changer la base en p_{m+1}, et faire moins 1 pour obtenir N_{m+1}.

Montrer que, quel que soit N, on finir par obtenir 0 en un temps fini.