Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2023-10-11

1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, i.e. il n'existe pas $a, b \in \mathbb{Z}$ t.q. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Que dire $\sqrt[3]{2}$? et $\log_{10} 2$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?
2. Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, et tels que l'équation
$$ax^2 + (c+b)x + (e+d) = 0$$
a une solution réelle plus grande que 1. Montrer que l'équation
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$
admet une solution réelle. *On peut utiliser la méthode de preuve par l'absurde.*
3. Soit p un nombre premier, montrer que, si x n'est pas un multiple de p, alors il existe unique $y \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ t.q. $xy = 1[p]$.

   Soit m entier positive, et S l'ensemble des nombre dans $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ qui sont premier entre-eux avec m, montrer que pour tout $x \in S$, il existe unique $y \in S$, t.q. $xy = 1[m]$.
4. Montrer que la somme des angles de n'importe quel polygone (pas forcément convexe) à n côtés est égale à $\pi(n-2)$. *On peut utiliser la méthode de récurrence.*
5. Montrer que, si $n \geq 3$ est un entier, alors $n! > 2^n$.
6. Il existe un certain nombre de droites qui divisent le plan en différentes régions. Montrer que nous pouvons toujours colorier ces régions avec seulement deux couleurs, de telle sorte que deux régions adjacentes n'ont jamais la même couleur.
7. La suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ est telle que $a_1 = 1$ et pour tout $m, n \geq 0$ et $m \geq m$ on a
$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}).$$
Donner une formule pour a_n.
8. Une triangulation d'un polygone est une partition du polygone en triangles, de sorte que les sommets de triangles sont des sommets du polygone. Se donner une triangulation, si deux sommets est connecté par une arête d'un triangle, on dit qu'ils sont adjacents. Combien de couleurs il faut (en coloriant tous les sommets) pour que tous les sommets adjacents n'ont pas de même couleurs (quelques soient la triangulation)?
9. Montrer que
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$
10. Est-ce vrai: si $a, b \notin \mathbb{Q}$, alors $a^b \notin \mathbb{Q}$?
11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ t.q. $x + x^{-1}$ est un entier, monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + x^{-n}$ est un entier.