

Cercle mathématique de Strasbourg, semaine 2023-09-27

1. Montrer que le produit de 4 nombres naturels consécutifs n'est pas un carré parfait.
2. Calculer

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}.$$

Que veut

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}?$$

Peux-tu donner encore des généralisations?

3. Un enquêteur recenseur frappe à la porte d'une famille et demande à la femme à l'intérieur combien d'enfants elle a et quel âge ils ont.

La femme répond : "J'ai trois filles, leur âge est un nombre entier et le produit de leurs âges est égal à 36."

"Ces informations ne suffisent pas pour calculer l'âge de tes filles." répond l'enquêteur.

"Même si je te donne la somme de leurs âges, tu ne pourras pas calculer leur âge."

"J'aimerais que tu me fournisses plus d'informations."

"D'accord, ma fille aînée, Anne, aime les chiens !"

Est-ce que l'enquêteur peut calculer l'âge des trois filles de cette femme à partir de cette conversation ?

4. Je suis assis dans le bus et j'entends par hasard une conversation entre deux contrôleurs. Le contrôleur A dit: "J'ai un certain nombre d'enfants, dont l'âge est un nombre entier strictement positif. Le produit de leurs âges est égal à mon propre âge et la somme de leurs âges est le numéro de ce bus."

Le contrôleur B regarde le numéro du bus et dit: "Peut-être que si tu me dis ton âge et combien d'enfants tu as, je pourrai calculer leurs âges ?"

A répond: "Non, tu seras toujours bloqué."

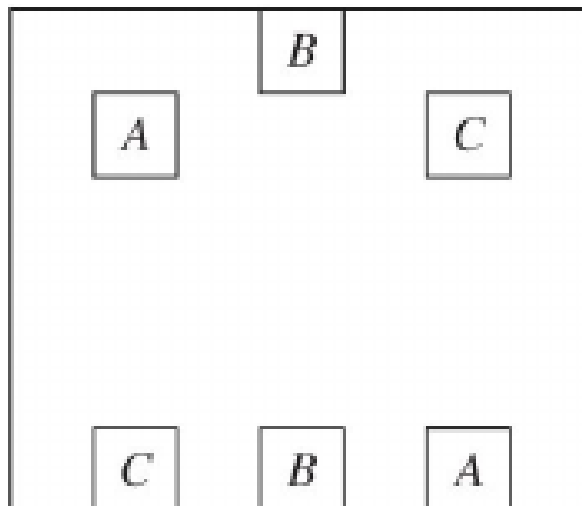
Soudain, B s'écrie: "Je sais enfin quel est ton âge !"

Quel est le numéro du bus ?

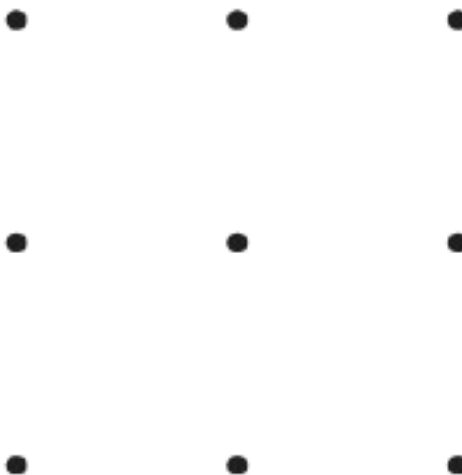
5. Une fois, j'ai invité 10 couples chez moi pour un dîner. J'ai demandé à toutes les personnes présentes (y compris ma femme) combien de personnes elles avaient serré la main. J'ai appris que chaque personne avait un nombre différent de poignées de main, sauf moi car je ne me suis pas posé la question.

Supposons que personne ne se serre la main avec son conjoint et que nous ne considérons pas les personnes se serrant la main elles-mêmes. Alors, combien de personnes ma femme a-t-elle serré la main ? (Je ne me suis posé aucune question à moi-même.)

6. Veuillez observer l'image ci-dessous. Pouvez-vous relier les carrés situés en haut de l'image avec les carrés correspondants en bas à l'aide de lignes qui ne se croisent pas, et en veillant à ce que les lignes restent à l'intérieur de l'image ? Peux-tu rendre le problème plus difficile?



7. Un moine a grimpé une montagne. Il est parti à 8 heures du matin et est arrivé au sommet à midi. Il a passé la nuit là-bas. Le lendemain matin, à partir de 8 heures, il a commencé à redescendre en empruntant le même chemin que celui qu'il avait pris la veille pour monter. Il est arrivé au pied de la montagne à midi. Montrer qu'il y a forcément un moment entre 8 heures et midi où ce moine, pendant son ascension et sa descente, est arrivé au même endroit. (Il est important de noter que la question ne demande pas à quelle vitesse le moine marche, par exemple, il peut commencer à marcher à une vitesse de 4 kilomètres par heure, puis s'arrêter pour se reposer, puis continuer, etc. Il n'est pas non plus nécessaire que sa vitesse soit la même lorsqu'il monte et descend.)
8. Veuillez connecter les neuf points de la figure ci-dessous en utilisant quatre segments de ligne adjacents.



9. Veuillez indiquer les chiffres corrects dans les cases vides du tableau ci-dessous.

1	3	9	3	11	18	13	19	27	55	
2	6	2	7	15	8	17	24	34	29	
3	1	5	12	5	13	21	21	23	30	

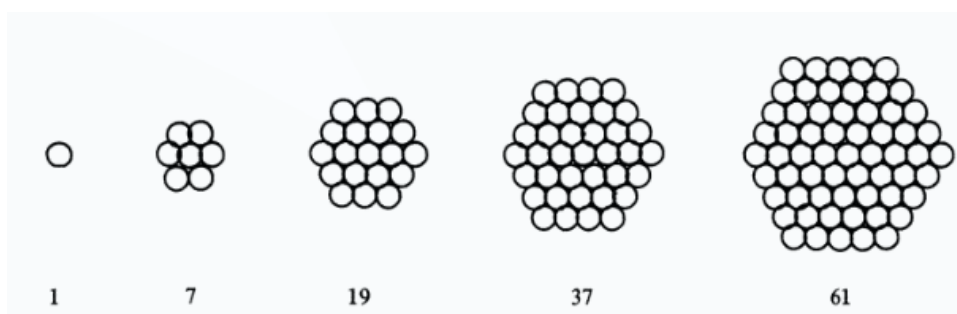
10. Le n ième terme de la suite 101, 104, 109, 116, ... est $a_n = 100 + n^2$. Pour chaque n , notons d_n le pgcd de a_n et a_{n+1} , quel est $\max_{n \geq 1} d_n$? *Le plus grand des pgcd d_n pour tous les entiers $n \geq 1$.*
11. Tous les armoires sont alignées en ligne et numérotées de 1,2,3,...,1000. Au départ, toutes les armoires sont verrouillées.

Une personne passe par là et ouvre chaque deuxième armoire. Elle commence par l'armoire numéro 2, donc toutes les armoires avec des numéros pairs sont ouvertes.

Ensuite, une deuxième personne passe et modifie l'état de chaque troisième armoire (c'est-à-dire si une armoire est ouverte, elle la verrouille et si une armoire est verrouillée, elle l'ouvre).

Ensuite, une troisième personne passe par ces armoires et modifie l'état de chaque quatrième armoire. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'armoire dont l'état peut être modifié. On demande : quelles sont les armoires finalement verrouillées ?

12. Vingt-cinq personnes sont assises autour d'une table, chacune d'entre elles tenant deux cartes dans les mains. Chaque carte est numérotée avec l'un des chiffres de 1 à 25, et chaque chiffre apparaît exactement sur deux cartes. Chaque personne passe la carte numérotée le plus petit dans sa main à la personne immédiatement à sa droite, et ainsi de suite. Montrer que finalement, il y aura au moins une personne qui aura les deux cartes avec le même numéro.
13. Soit $T(n)$ le maximum de régions que l'on peut obtenir en traçant tous les segments possibles entre n points sur un cercle.
- Calculer $T(1), T(2), T(3), T(4)$ et $T(5)$.
 - Que vaut $T(6)$? Êtes-vous sûr et certain?
14. La suite de nombres hexadécimaux est représentée ci-dessous (les 5 premiers, notons $H(1), H(2), \dots, H(5)$),



Leurs sommes partielles sont notées par $\Sigma(k) = H(1) + H(2) + \dots + H(k)$, calculer $\Sigma(1), \dots, \Sigma(5)$. Pouvez vous donner une conjecture pour $H(n)$? Êtes-vous sûr?